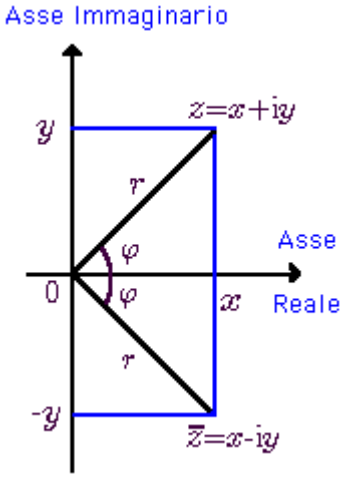
NUMERI COMPLESSI: alcuni esercizi svolti

<wikipedia> rappresentazione cartesiana e polare; modulo, fase; formula di Eulero (rappresentazione esponenziale) e^{ix} = cos x + i sen x. <google> esercizi con i numeri complessi <calv.pdf>
Se tu trovassi errori o ingenuità in questa pagina, ti pregherei di darmene segnalazione: grazie!

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 01/05/2025; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

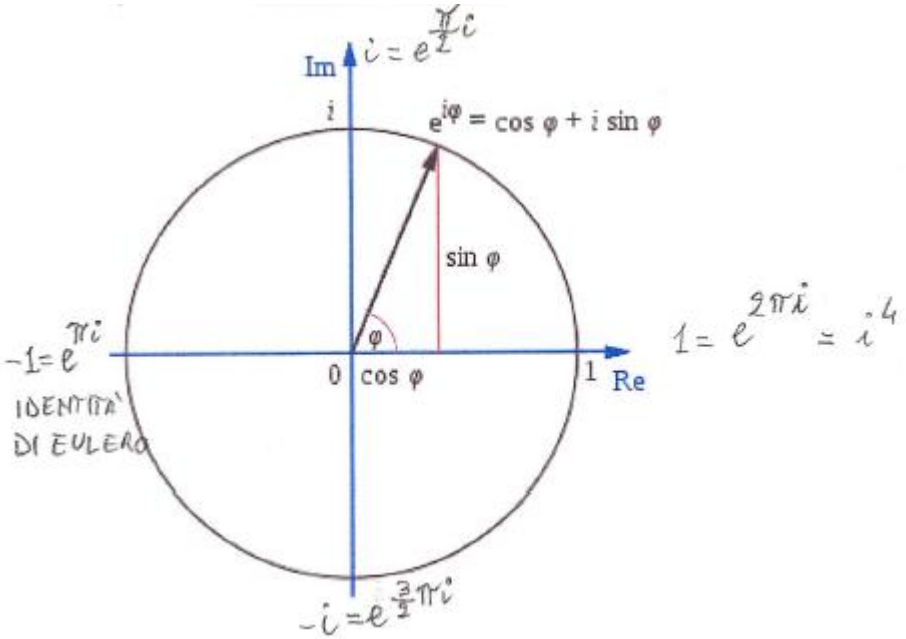
Pagine correlate: matematica medie e superiori

Un numero complesso può essere visto come un punto del *piano cartesiano*, chiamato in questo caso piano di *Gauss*, definendo l'asse y come asse immaginario e la i come *unità immaginaria*. Una rappresentazione di questo tipo si chiama diagramma di *Argand-Gauss*.



$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (forme algebrica e trigonometrica)

e, usando la *Formula di Eulero* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ (forma esponenziale)



r è detto anche modulo, e l'angolo è detto fase, essendo tale coppia definita anche *coordinate polari*

Usando le formule inverse, da $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ricaviamo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} \text{ per } x > 0$$

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi \text{ per } x < 0$$

e per x = 0 vedi rispettivamente il limite destro e sinistro per $x \to 0^{\pm}$ delle suddette funzioni.

Nel seguito propongo la soluzione di alcuni esercizi, della quale, però, non ho avuto tempo di verificare la correttezza. (

↑2020.10.24 La radice quadrata di un numero complesso a + bi è un numero complesso x + yi che elevato al quadrato dà come risultato a + bi. $(x + yi)^2 = a + bi$. Si risolve con sistema di due equazioni $f_1(x,y) = a$, $f_2(x,y)=b$, con f1,2 parte reale e parte immaginaria ogni numero complesso ha due radici quadrate. Vedi ad esempio *qui*

↑2020.10.22 Descrivere nel *piano complesso C* l'insieme degli elementi z appartenenti a C tali che

$$|z + i(z - 2)| = 2.$$

indicando con $z = x + yi$ avremo

$$|x + yi + \ i(x + yi - 2)| = 2$$
$$|x + yi + \ xi - y - 2i| = 2$$

scriviamo ordinatamente la parte reale separata da quella immaginaria

$$|x - y + (x + y - 2)i| = 2$$

e per definizione di modulo di un numero complesso avremo

$$\sqrt{(x - y)^2 + \ (x + y - 2)^2} = 2$$
$$(x - y)^2 + \ (x + y - 2)^2 = \ 4$$

e con pochi passaggi arriviamo a

$$x^2 + y^2 - x - y = 0$$

Salvo errori, l'insieme degli elementi z che soddisfano l'equazione assegnata è una circonferenza che ha

centro nel punto $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ e raggio = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

↑2020.10.21 Nell'*insieme C* dei numeri complessi (detto anche R^2) risolvere la seguente equazione

$$z^2 + 2i\bar{z} + 2i = 1$$

che si può scrivere anche come $z^2 + 2i\bar{z} + 2i - 1 = 0$

indicando con $z = x + yi$ avremo $\bar{z} = x - yi$

$$(x + yi)^2 + \ 2i(x - yi) + \ 2i - 1 = 0$$
$$x^2 - y^2 + 2xyi + 2xi - 2yi^2 + 2i - 1 = 0$$
$$x^2 - y^2 + 2xyi + 2xi + 2y + 2i - 1 = 0$$

scriviamo ordinatamente la parte reale separata da quella immaginaria

$$x^2 - y^2 + 2y - 1 + (2xy + 2x + 2)i = 0$$

affinché risulti zero, occorre che siano uguali a zero sia la parte reale sia quella immaginaria

quindi avremo un sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0 \\ \quad xy + x + 1 = 0 \end{cases}$$

dalla seconda equazione ricaviamo y

$$y = \ -\frac{x + 1}{x}$$

che sostituiremo nella prima equazione.

Per non dilungare troppo su questa pagina scrivo il seguito qui con due modalità

Otteniamo come soluzione tre numeri complessi

$z_1 = -1$ (numero reale puro, senza parte immaginaria)

$$z_2 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$
$$z_3 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$