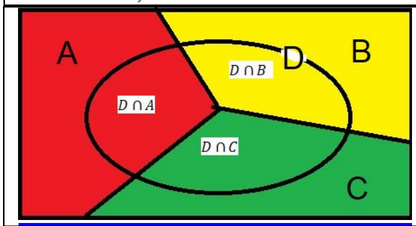
Calcolo delle PROBABILITÀ

Scusa la banalità di questa bozza di appunti: molto di meglio troveresti in internet.

<*youmath*> *PROBABILITÀ discreta* (casualità/aleatorietà, spazi campionari Ω discreti e continui, cardinalità di un insieme, *assiomi della probabilità discreta*, eventi incompatibili (INTERSEZIONE vuota, evento congiunto impossibile, eventi mutuamente esclusivi), eventi compatibili (intersezione non vuota, evento congiunto possibile); eventi indipendenti e dipendenti (dipendenti quando un secondo evento si trova un numero di eventi possibili ridotto dal precedente evento);
probabilità composta $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$, formula che diventa $(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$ quando i due eventi sono indipendenti;
teorema della probabilità totale o probabilità dell'UNIONE (quando almeno uno degli eventi si verifichi)



- per due eventi $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
- e nel caso generale $P(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} E_i - \cdots + \cdots - \ldots$vedi qui
- e nel caso di evento D condizionato da partizioni di Ω:
  $P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + \cdots$ (vedi anche media ponderata)

- Teorema di Bayes: $P(B|A) = P(A|B) \cdot \frac{P(B)}{P(A)}$ ovvero $P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$ che deriva dalle probabilità composte
- <*weschool*> **prove ripetute**, formula di Bernoulli: se un evento ha una probabilità p di verificarsi per ciascuna prova, ed effettuiamo n prove indipendenti, la probabilità che l'evento si verifichi k volte $(con\ k \leq n)$ è $P(k\ successi\ su\ n\ prove) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
- <*youmath*> problemi d'**urna**, esercizi risolti
- <*liceoMajorana*> il calcolo dei casi possibili, rappresentazione ad albero; **vari esercizi risolti**

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 09/02/2023; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: matematica x scuola secondaria, statistica calcolo combinatorio

Per risolvere alcuni degli gli esercizi affrontati in questa pagina diamo per scontata anche la conoscenza del calcolo combinatorio

↑2023.02.09 dagli esercizi di riepilogo di un libro di testo

#263 un programma informatico è sottoposto a tre test fra loro indipendenti; se il programma contiene un errore, i tre test sono in grado di individuare l'errore rispettivamente con una probabilità uguale al 25% al 40% e al 60%; supponi che il programma contenga un errore: qual è la probabilità dell'evento E «l'errore viene individuato da **almeno** uno dei tre test»?

Risp: sarà $P(E) = 1 - P(E^C)$ dove E^C è «nessuno dei tre test individua l'errore»; siccome i test sono indipendenti sarà $P(E^C) = \frac{100-25}{100} \cdot \frac{100-40}{100} \cdot \frac{100-60}{100} = 0{,}18$; quindi $P(E) = 1 - 0{,}18 = 0{,}82$

#267 si lancia quattro volte una moneta regolare.
a) qual è la probabilità di ottenere quattro «testa»
b) qual è la probabilità di ottenere due «teste» e due «croce»?

Risp.: usiamo la formula di Bernoulli (delle prove ripetute) $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ con $p = \frac{1}{2}$, $n = 4$, $k = 4$ ed otteniamo $P(\#263a) = \frac{1}{16}$. Poi $P(\#263b) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$

↑2023.02.08 alcuni esercizi significativi tratti da web, ad esempio da <*youmath*>

Applicazioni del teorema (formula) della probabilità totale $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

#T1 Anna decide di portare in vacanza un romanzo o un libro giallo; con probabilità pari a 0,4 le piacerà il romanzo; con probabilità pari a 0,5 le piacerà il libro giallo e con probabilità pari a 0,2 le piaceranno entrambi i libri. Qual è la probabilità P che non le piaccia nessuno dei due?
Risp: sarà $1 - P(E_1 \cup E_2)$ dove $P(E_1 \cup E_2) = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}7$. Quindi $P = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

#T2 Nel caso che conoscessimo $P(E_1 \cup E_2)$, diversa da $P(E_1) + P(E_2)$ come avviene nel caso di eventi compatibili, potremmo ricavare dal teorema della probabilità totale la probabilità dell'evento congiunto $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$; ad esempio: in una scuola il 25% degli studenti è stato bocciato in Matematica, il 15% è stato bocciato in chimica e il 30% è stato bocciato in **almeno** una delle due materie; se si sceglie uno studente a caso qual è la probabilità che sia stato bocciato sia in matematica sia in chimica?

Risp.: sono dati $P(E_1) = 0{,}25$, $P(E_2) = 0{,}15$, $P(E_1 \cup E_2) = 0{,}3$:
allora $P(E_1 \cap E_2) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}3 = 0{,}1$

Applicazioni della formula della probabilità composta $(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$,

#C1 Una prova scritta di un concorso si compone di due quesiti entrambi sono selezionati in modo casuale da un archivio che ne contiene 50 di Matematica 30 di Storia 20 di Geografia qual è la probabilità che i quesiti estratti siano entrambi di Matematica?

Risp.: $|\Omega| = 100$; il verificarsi dell'evento E_1 «primo estratto Matematica» riduce il numero delle possibilità per la seconda estrazione, quindi si tratta di eventi composti condizionati:
$(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$,

Applicazioni della formula di Bayes

#B1 supponiamo che in una fabbrica ci siano due linee di produzione per sacchetti di carta: la linea A produce 500 sacchetti al giorno di cui 2% difettosi, la linea B produce 300 sacchetti al giorno di cui 1% difettosi: trovato un sacchetto difettoso all'uscita dalla fabbrica, qual è la probabilità che esso provenga dalla prima linea di produzione?

Risp.: chiamiamo D l'evento «trovato un sacchetto difettoso»; conosciamo la difettosità della linea A: $P(D|A) = 0{,}2$ e quella della linea B $P(D|B) = 0{,}1$; la probabilità che quel sacchetto difettoso provenga dalla linea A è indicata con $P(A|D)$ e possiamo calcolarla con Bayes $P(A|D) = \frac{P(D|A) \cdot P(A)}{P(D)} = \frac{10}{13}$ perché abbiamo $P(D|A) = 0{,}2$, $P(A) = \frac{500}{800}$ e $P(B) = \frac{300}{800}$, mentre possiamo calcolare $P(D)$ come in Nota1

↑2023.02.03 da un libro di testo

#53 Un'urna contiene n palline bianche e n palline nere; viene estratta una pallina dall'urna poi, senza rimettere la pallina estratta nell'urna, ne viene estratta una seconda

a. determina la probabilità che le tue palline estratte siano entrambe bianche
b. determina la probabilità che le due palline estratte siano entrambe nere
c. determina la probabilità che le due palline estratte siano dello stesso colore
d. sapendo che la probabilità che le due palline estratte siano dello stesso colore è $11/23$, $n = ?$

Risp.53a: per il teorema della probabilità composta (o congiunta) di due eventi in cui il secondo è condizionato dal primo avremo $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$ quindi $\frac{n}{2n} \cdot \frac{n-1}{2n-1} = \frac{n-1}{2(2n-1)}$

Risp.53b: ovviamente la stessa probabilità di 53a.

Risp.53c: equivale alla probabilità che siano entrambe bianche o che siano entrambe nere, eventi incompatibili: applichiamo il teorema della probabilità totale sommando le probabilità dell'evento 53a e dell'evento 53b, ottenendo $\frac{n-1}{2n-1}$

Risp.53d, basta risolvere l'equazione $\frac{n-1}{2n-1} = \frac{11}{23}$: otterremo $n = 12$

Compara la soluzione di questo problema con quella del #79, dove le due palline vengono estratte in blocco anziché in successione

#71 calcola la probabilità di trovare un anagramma della parola «scuola», che abbia una vocale in terza posizione e una consonante in ultima.

Risp. risolverei a prescindere da $n! = 720$ diversi anagrammi, perché basta usare il teorema della probabilità composta

- l'evento $E_1(vocale\ in\ terza\ posizione)$ a prescindere dalla posizione ha 3 vocali favorevoli su 6 lettere complessive, quindi $P(E_1) = 1/2$
- l'evento $E_2(consonante\ in\ ultima\ posizione)$ è condizionato dall'evento precedente: abbiamo 3 consonanti favorevoli su 5 lettere rimaste dopo l'evento E_1, quindi $P(E_2|E_1) = 3/5$
- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$

#76 considera un mazzo di 52 carte (cuori, quadri, fiori, picche) togli le 12 carte numerate 8,9,10, ne restano 40; se scegli simultaneamente dal mazzo 6 carte, qual è la probabilità che tra queste sei ci sia l'asso di cuori?

Risp: se fosse l'estrazione di un a sola carta sarebbe $\frac{1}{40}$, e questa probabilità per l'asso di cuori varrebbe per qualunque altra carta prestabilita; in questo caso l'estrazione simultanea di 6 carte equivale a 6 volte il primo evento favorevole (o 6 estrazioni con reintegro) quindi $6\frac{1}{40} = \frac{3}{20}$.

#79 un classico problema d'urna che possiamo risolvere con la probabilità composta (modo1) oppure con il calcolo combinatorio (modo2): un'urna contiene quattro palline nere e tre palline bianche; se si estraggono contemporaneamente due palline dall'urna, calcola la probabilità
a. di estrarre due palline nere (E_1)
b. di estrarre due palline bianche (E_2)
c. di estrarre due palline dello stesso colore
d di estrarre due palline di colori differenti

Modo1: con la probabilità composta

Risp. 79a1: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$.

Risp. 79b1: come qui sopra: $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$.

Risp.79c1: eventi disgiunti, quindi $P(E_a \cup E_b) = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

Risp.79d1: è la probabilità dell'evento complementare del precedente, quindi $1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

Modo2 con il calcolo combinatorio

Risp. Individuiamo lo *spazio campionario*, ipotizzando che le palline siano numerate da 1 a 7; siccome l'estrazione avviene in blocco, non conta l'ordine, e, inoltre, ogni pallina non può comparire più di una volta (la ripetizione potrebbe accadere se l'estrazione non fosse in blocco ma con reintegro); quindi il numero di casi possibili è uguale al numero di combinazioni semplici $C_{7,2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21$

Risp. 79a2: tra le suddette 21 coppie, ci sono anche le coppie NN: quante sono? Tante quanti i modi in cui le 4 nere possono combinarsi tra loro $C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ che è il numero di casi favorevoli, quindi $P(E_a) = \frac{\# \, casi \, favorevoli}{\# \, casi \, possibili} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

Risp. 79b2: calcoliamo il # di casi favorevoli come in 79a2: $C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$, dal che $(E_b) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

Risp. 79c2: vedi Risp.79c1

Risp. 79d2: vedi Risp.79d1.

#81qual è la probabilità di fare un terno al lotto indovinando tre dei 5 numeri che possono uscire su una specificata ruota? E se gioco un terno su tutte le 10 ruote?

Risp: i numeri del lotto vanno da 1 a 90; nella cinquina non ci possono essere ripetizioni, non conta l'ordine di estrazione, quindi lo *spazio campionario* è $C_{90,3} = \frac{90!}{3!(90-3)!} = 117.480$. La probabilità di azzeccare uno di questi eventi è $P(E_{terno}) = \frac{1}{117.480}$. Se giocassi il terno su tutte le 10 ruote avrei la somma di tali 10 probabilità, quindi $\frac{1}{11.748}$

#82 una classe di 20 alunni è costituita da 12 maschi e 8 femmine: qual è la probabilità che tre alunni scelti a caso, siano dello stesso sesso?

Modo1: con la probabilità composta

Immaginiamo di fare tre estrazioni in successione: nella prima la probabilità che sia ♂ è $\frac{12}{20}$ e che sia ♀ è $\frac{8}{20}$, nella seconda estrazione sono rispettivamente $\frac{11}{19}$ e $\frac{7}{19}$ e nella terza estrazione $\frac{10}{18}$ e $\frac{6}{18}$; la probabilità che siano tre maschi oppure tre femmine è $\frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} \cdot \frac{10}{18} + \frac{8}{20} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{6}{18} = \frac{1656}{6840} = \frac{23}{95}$

Modo2 con il calcolo combinatorio

Risp. Possiamo fare lo stesso ragionamento del #79. *Spazio campionario* $C_{20,3} = 1.140$
I 12 maschi possono combinarsi tra loro nella tripletta in $C_{12,3} = 220$ modi
Le 8 femmine possono combinarsi tra loro nella tripletta in $C_{12,3} = 56$ modi
L'evento che cerchiamo (o 3 maschi o 3 femmine) avrà probabilità uguale alla somma delle probabilità dei suddetti due eventi $\frac{220}{1.140} + \frac{56}{1.140} = \frac{23}{95}$

#83 in una città ci sono 6 hotel; un dato giorno 3 persone prenotano ciascuna una camera in uno degli hotel in modo del tutto casuale; qual è la probabilità che le tre persone si trovino in tre hotel differenti.

Risp. Lo spazio campionario (numero di eventi possibili) sono le disposizioni con ripetizione delle cifre da 1 a 6 su tre posti (vedi nota 3 del calcolo combinatorio: $D^*_{6,3} = 6^3$. Tra queste 216 triplette quelle che non hanno cifre ripetute sono esattamente gli eventi favorevoli che ci interessano e dunque sono le disposizioni senza ripetizione $D_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$. $P(\#83) = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$

#88 Tre persone salgono sull'ascensore al piano terreno; l'ascensore si ferma a sei diversi piani; supponiamo che ciascuna delle tre persone possa scendere a caso a uno qualsiasi di questi dei piani.
Qual è lo *spazio campionario*? È il numero di modi in cui 3 persone possono scendere sui 6 piani: metti le tre persone fisse allineate, immagina che ciascuna delle persone alzi una paletta con il numero del piano a cui è scesa; quante triplette diverse puoi vedere, considerando che il numero del piano può ripetersi su più di una paletta? $D^*_{6,3} = 6^3 = 216$ (vedi nota3a nel calcolo combinatorio)

a. Qual è la probabilità che le tre persone scendano tutte al primo piano?
Tra le suddette triplette, ci sarà anche quella contrassegnata da 111: $P(E_a) = \frac{1}{216}$

b. Qual è la probabilità che le tre persone scendano tutte allo stesso piano?
è la somma di 6 delle suddette probabilità $P(E_b) = 6 \cdot \frac{1}{216} = \frac{1}{36}$

c. Qual è la probabilità che le tre persone scendano al 4° o al 5° piano, ma ammettendo sia la possibilità che scendano tutte al 4° o al 5°, sia la possibilità che si distribuiscano sui due a piacere
È evidente che è la stessa probabilità che possano scendere al 1° o al 2°, oppure al 3° e al 6, e così via: basta calcolare il numero di modi in cui 3 persone possono scendere su due soli piani; distribuzione delle 3 persone su 2 posti $D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ più 2, cioè i due casi in cui anziché distribuirsi su due piani, le persone scendono tutte al 4° o al 5° piano; allo stesso risultato 8 potresti arrivare col metodo delle *palette* di nota 3 del calcolo combinatorio: $D^*_{2,3} = 2^3 = 8$, quindi $P(E_c) = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}$

d. Qual è la probabilità che le tre persone scendano o tutte 3 al 4° piano **o** tutte 3 al 5° piano?
La probabilità che possano scendere al 4° è la stessa che abbiamo calcolato come $(E_a) = \frac{1}{216}$
e idem per la probabilità che possano scendere al 5°, quindi $P(E_d) = \frac{1}{216} + \frac{1}{216} = \frac{1}{108}$

#114 Una password numerica è costituita da 5 cifre ripetibili scelte tra le 10 $\{0,1, \dots 9\}$; quante password si possono generare? Scelta caso una password qual è la probabilità che *almeno* due cifre della password siano uguali?
Risp1: è la cardinalità dello spazio campionario: 10^5.
Risp1: quell'*almeno* ci spinge a studiare l'evento complementare E^cdi dell'evento cercato E: contare quante sarebbero le password prive di ripetizione (evento E^c) cosicché tutte le altre sarebbero quelle con almeno una ripetizione (evento E); le password senza ripetizione sono $D_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30.240$; dal che ricaviamo $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - \frac{30.240}{10^5} = \frac{436}{625}$

#121 Un circolo sportivo avente 125 soci organizza due tornei: uno di tennis e uno di calcetto; 60 soci partecipano al torneo di tennis $(evento\ E_1)$, 45 al torneo di calcetto $(evento\ E_2)$ e 25 a entrambi i tornei $(evento\ E_1 \cap E_1)$; si sceglie a caso uno dei soci del circolo; determina la probabilità che tale socio partecipi
a) a entrambi i tornei; b) soltanto al torneo di tennis; c) soltanto al torneo di calcetto; d) ad **almeno** uno dei due tornei; e) a nessuno dei due tornei.
Risp.: La risposta a #121a è già fornita dai dati: $\frac{25}{125} = \frac{1}{5}$.
$P(\#121\text{b}) = \text{P}(E_1) - \text{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{60}{125} - \frac{25}{125} = \frac{35}{125} = \frac{7}{25}$;
$P(\#121\text{c}) = \text{P}(E_2) - \text{P}(E_1 \cap E_2) = \frac{45}{125} - \frac{25}{125} = \frac{20}{125} = \frac{4}{25}$
$P(\#121\text{d}) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{60}{125} + \frac{45}{125} - \frac{25}{125} = \frac{80}{125} = \frac{16}{25}$;
$P(\#121\text{e}) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

#162 supponiamo che sia del 15% la probabilità che sia ancora viva sotto la valanga una persona trovata dai soccorritori un'ora dopo che è stata travolta; supponi che una squadra di soccorso trovi due escursionisti un'ora dopo la caduta della valanga; supponi che la sopravvivenza di ciascuno sia indipendente dalla sopravvivenza dell'altro. Qual è la probabilità di trovare in vita
a) entrambi gli escursionisti
b) almeno uno degli escursionisti
Risp.a): $P(\#162a) = \frac{15}{100} \cdot \frac{15}{100} = \frac{9}{400}$
Risp.a): di solito quando vedi la parola "almeno" si ragiona in termini di insieme unione o di sottoinsieme complementare; trovare in vita almeno uno degli escursionisti è evento complementare a

trovarne in vita nessuno; quest'ultimo evento ha probabilità rare qui la probabilità $\frac{85}{100} \cdot \frac{85}{100} = \frac{17 \cdot 17}{400}$, quindi $P(\#162b) = 1 - \frac{17 \cdot 17}{100} = \frac{111}{400}$

#163 Barbara il sabato sera va a mangiare in pizzeria con probabilità uguale al 95% e sceglie casualmente fra la pizzeria A e la pizzeria B. Paolo va a mangiare in pizzeria **tutti** i sabati sera nella stessa ora di Barbara, scegliendo anche lui casualmente tra la pizzeria A e la pizzeria B.
a) Qual è la probabilità che in un dato sabato Barbara e Paolo si incontrino in pizzeria?
b) Qual è la probabilità che Paolo e Barbara si incontrino il prossimo sabato sera?
Risp#163a: Barbara potrebbe non andare in pizzeria (5% di probabilità), ma, se ci andasse (95%), avrebbe il 50% di probabilità di scegliere la pizzeria A; Paolo va sempre e avrà il 50% di probabilità di scegliere la pizzeria A (faremmo le stesse considerazioni se ipotizzassimo incontro in pizzeria B; dunque per un incontro in pizzeria A la probabilità è $P(\#163a) = \frac{95}{100} \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{50}{100} = \frac{19}{80}$ che è uguale alla probabilità che si incontrino in pizzeria B.
Risp#163b: è come dire che si possono incontrare o nella pizzeria A o nella pizzeria B, quindi unione dei due eventi, quindi $\frac{19}{80} + \frac{19}{80} = \frac{19}{40}$.

↑2021.05.20 da un libro di testo un esercizio con due eventi compatibili: un'urna contiene 2 palline blu, 4 rosse e 3 verdi. Si estrae una pallina, la si rimette e si esegue ancora un'estrazione. Qual è la probabilità che la prima estratta sia blu OPPURE che la seconda estratta sia verde? Vedi teorema della probabilità totale: trattandosi di due eventi compatibili, avremo
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = 2/9 + 3/9 - (2/9 \cdot 3/9) = 13/27$

SEGUITO DEL SOMMARIO
Nota1 nel caso di un evento D condizionato da partizioni di Ω il teorema della probabilità totale, si esprime anche con la formula $P(D) = P(D|A) \cdot P(A) + P(D|B) \cdot P(B) + \cdots$ che mi piace ricordare come formula per la media ponderata. Ad esempio: supponiamo che in una fabbrica ci siano due linee di produzione per sacchetti di carta: la prima linea produce 500 sacchetti al giorno di cui 2% difettosi, la seconda 300 sacchetti al giorno di cui 1% difettosi: qual è la difettosità media dei sacchetti che escono da quella fabbrica? A buon senso diremmo la media ponderata cioè $\frac{500 \cdot 0{,}2 + 300 \cdot 0{,}1}{800} = \frac{13}{800}$, come da suddetta formula: $P(D) = 0{,}2 \cdot \frac{500}{800} + 0{,}1 \frac{300}{800}$