STUDI DI FUNZIONE

Tieni presente il <math.it> formulario delle derivate

ESERCIZI
- **un esempio semplice** di studio di funzione con un max e 1 flex; altri esercizi risolti accludo qui appresso alle varie date; altri esempi semplici potresti trovare in <matematicagenerale>;
- esempi di studio di **funzioni razionali fratte** potresti trovare in <google; francesco.daddi; unisubria.it;
- esempi di **funzioni esponenziali** <google> e **logaritmiche** <google> e altre ancora in <uniud.it; unisubria>;
- esempi di studio dell'**asintoto obliquo** ti fornirei qui;
- esempi di limiti con regola di **De l'Hopital** ti forniurei qui;
- Temi di 4ªITI: ad es. questo con limiti e derivate
- ad inizio 5ª ITI ad es. ***questo facile esercizio***
- da unirc.it
- da matematicamente.it anche con audio
- da math.it
- da calvino.polito e qui anche per Aanalisi1
- da ystudio.it
- **Geogebra per tracciare grafici online**

Esercizi di **massimizzazione e minimizzazione** (ad es. minimizzare l'area di un triangolo, massimizzazione aree in semicirconferenza)

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 27/11/2023; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: matematica medie e superiori; limiti; formulario dei limiti notevoli e delle derivate; integrali

↑2023.11.21 Trovando gli zeri della derivata prima di una funzione f(x) possiamo individuare i valori di x per i quali la funzione ha un massimo o un minimo o un punto stazionario: è dunque possibile usare la derivata per risolvere problemi di massimizzazione o di minimizzazione, ad esempio geometrici: qui la soluzione di alcuni esercizi della specie proposti da un libro di testo

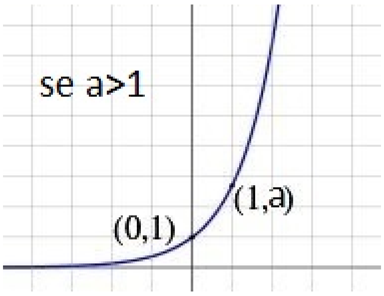
↑2019.09.27 per riconoscere una funzione dal grafico, è importante osservare (come in questo <pdf>) il segno della funzione e gli estremi degli intervalli che ne costituiscono il dominio (in tali estremi la funzione è sovente asintotica).

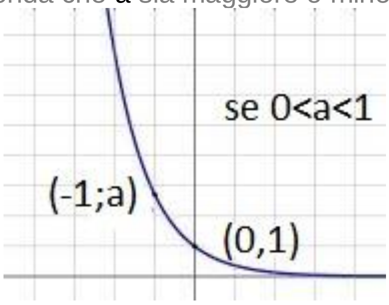
↑2019.05.23 studiare la seguente **funzione esponenziale**

$$2^{\frac{x}{x+1}}$$

individuiamo subito il C.E. (x+1≠0, quindi x≠-1)

Potremmo ricordare che la funzione esponenziale a^x (con a ovviamente sempre >0) è **sempre positiva** <ripmat> ed ha uno dei due seguenti andamenti a seconda che a sia maggiore o minore di 1

grafici di $y=a^x$ 

oppure 

Essendo la nostra base (a=2) maggiore di 1, ci aspettiamo un grafico del primo tipo sopra indicato, che però sarà spezzato nel punto proibito {-1} dove ci aspetteremo un asintoto verticale.

Intersezione con gli assi:

intersezione con asse $y \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2^{\frac{0}{0+1}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=2^0=1 \end{cases}$

intersezione con asse $x \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0=2^{\frac{x}{x+1}} \end{cases}$ mai

Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{x}{x(1+\frac{1}{x})}} = \lim_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{1}{1+0}} = 2$$

$$\lim_{x\to -1^+} 2^{\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to -1^+} 2^{\frac{-1}{0^+}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

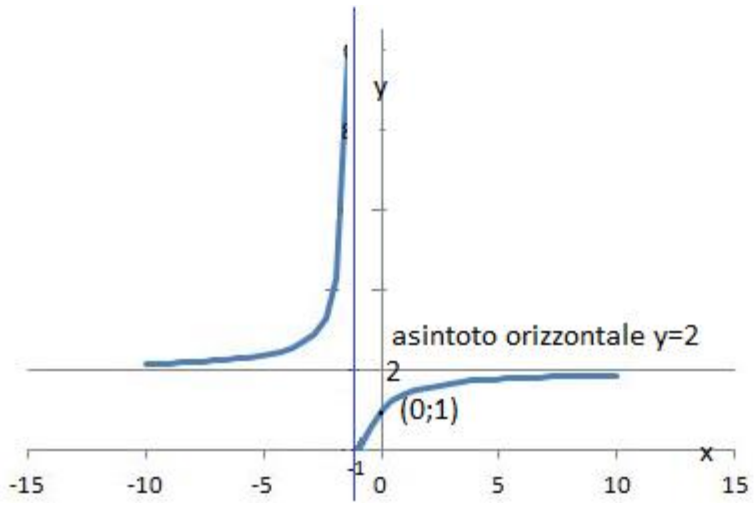
$$\lim_{x\to -1^-} 2^{\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to -1^-} 2^{\frac{-1}{0^-}} = 2^{+\infty} = \infty$$

Per la derivata occorre ricordare che $(a^x)' = a^x \ln(a)$; nel nostro caso abbiamo una funzione di funzione, per cui
$(a^{f(x)})' = a^{f(x)} \ln(a) f'(x)$, perciò $(2^{f(x)})' = 2^{f(x)} \ln(2) f'(x)$,

$$y' = 2^{\frac{x}{x+1}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' =$$

$$= \underbrace{2^{\frac{x}{x+1}}}_{\text{sempre} +} \cdot \underbrace{\ln 2}_{+} \cdot \underbrace{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}_{\text{sempre} +} =$$

la derivata prima è sempre positiva, quindi la f(x) sarà sempre crescente.
Il seguente grafico ho realizzato [con Excel]



Se si studiasse il segno della derivata seconda, si troverebbe che è positiva per x<-1 e negativa per x>-1, a riprova delle rispettive concavità della f(x) verso l'alto e verso il basso.

↑2019.05.16 studiamo la seguente **funzione razionale fratta**

$$f(x):\quad y = -x - \frac{4}{x} + 6 \qquad C.E.\ x \neq 0$$

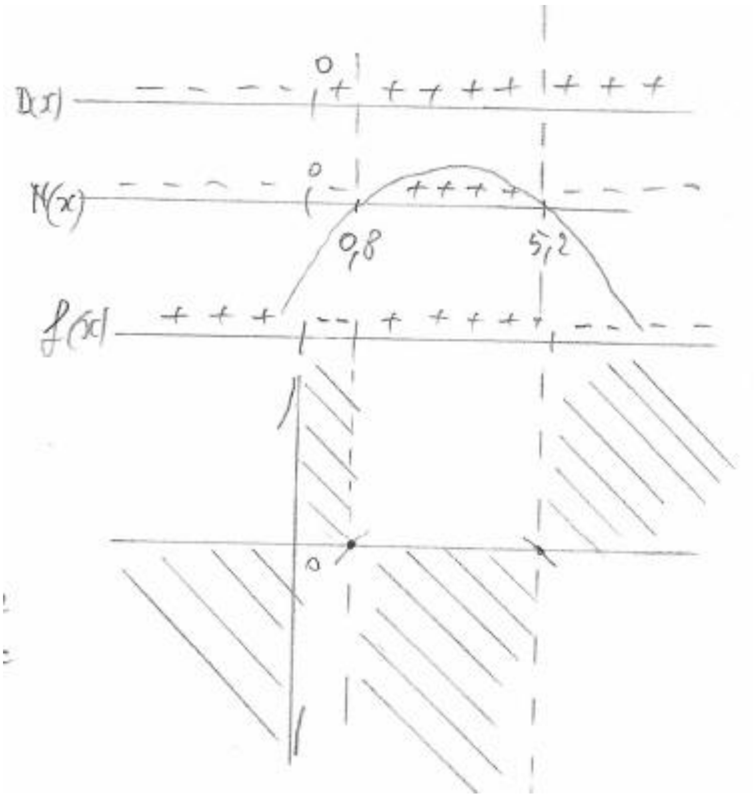
In x=0 mi aspetto un asintoto verticale.
Per studiare più agevolmente il segno della funzione mettiamola in forma di frazione

$$y = \frac{-x^2 - 4 + 6x}{x}$$

Intersezione con gli assi:
- con asse y (x=0) mai, per il C.E.
- con asse x (y=0) ci sarà intersezione solo se N(x)=0 con x≠0; vediamo

$$y=0 \text{ solo se } -x^2+6x-4=0$$
$$\Delta = 36-16 = 20$$
$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{-2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{-2}$$
$$x_1 = 3-\sqrt{5} \approx 3-2,2 \approx 0,8$$
$$x_2 = 3+\sqrt{5} \approx 3+2,2 \approx 5,2$$

Vediamo che abbiamo due intersezioni con l'asse x.
Per il segno della funzione studiamo quello dei suoi fattori
e barriamo le zone dei quadranti dove il grafico della funzione certamente non ci sarà



Lo studio dei limiti ci permette di segnare i primi tratti del grafico come andamenti al limite

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{-\infty^2+6\infty-4}{-\infty} = +\infty$$ prevale le x^2 su x

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{-\infty}{\infty} = -\infty$$

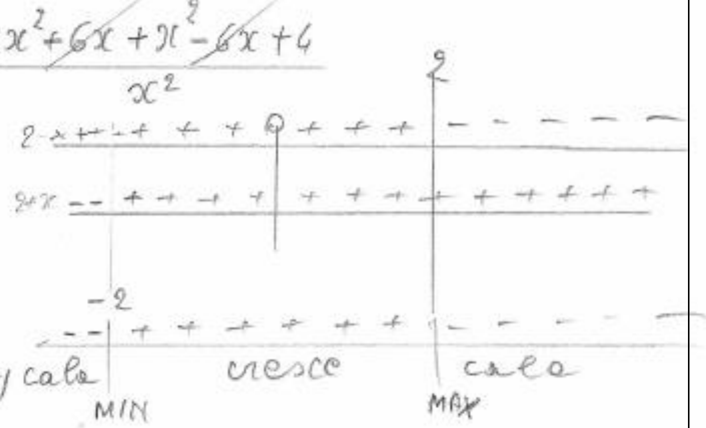
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

Lo studio del segno della derivata prima ci permette di documentare dove la f(x) cresce o decresce e dove abbia eventualmente punti di min/max

$$y' = \frac{(-2x+6)\cdot x-(-x^2+6x-4)\cdot 1}{x^2} = \frac{-2x^2+\cancel{6x}+x^2-\cancel{6x}+4}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2+4}{x^2} = \frac{(2-x)(2+x)}{x^2}$$



MIN $\begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{-4-12-4}{-2}=10 \end{cases}$ MIN$(-2;10)$

MAX $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{-4+12-4}{2}=2 \end{cases}$ MAX$(2;2)$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui di equazione y=mx+q esisteranno se e solo se esistono finiti i limiti m e q appresso indicati

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{-x^2+6x-4}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(-1+\frac{6}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}} = -1$$

m esiste finito; lo stesso valore si avrebbe con lim per x→-∞
cerchiamo se esiste finito anche q

$$q = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - m\,x\right) \text{ con } m=-1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2+6x-4}{x} + x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{-x^2}+6x-4+\cancel{x^2}}{x}$$

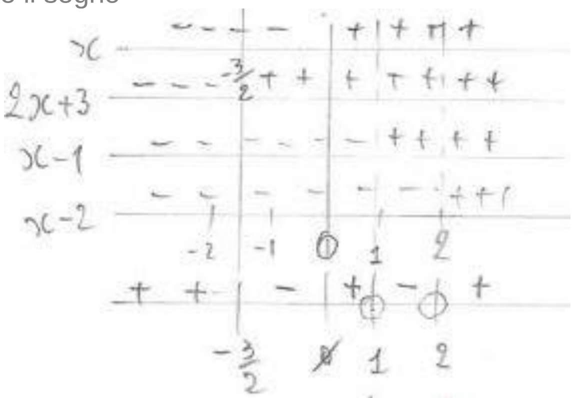
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x-4}{x} = 6$$

dunque anche q esiste finito, allora possiamo dire che la f(x) ha l'asintoto obliquo y=-x+6 per x→+∞;
Siccome otterremmo gli stessi valori cercando i suddetti limiti per x→-∞, possiamo dire che la stessa retta y=-x+6 è asintoto obliquo di f(x) anche per x→-∞

↑2013.01.13 studiamo la seguente funzione; scomponiamola in fattori

$$y = \frac{2x^2+3x}{x^2-3x+2} = \frac{x(2x+3)}{(x-1)(x-2)}$$

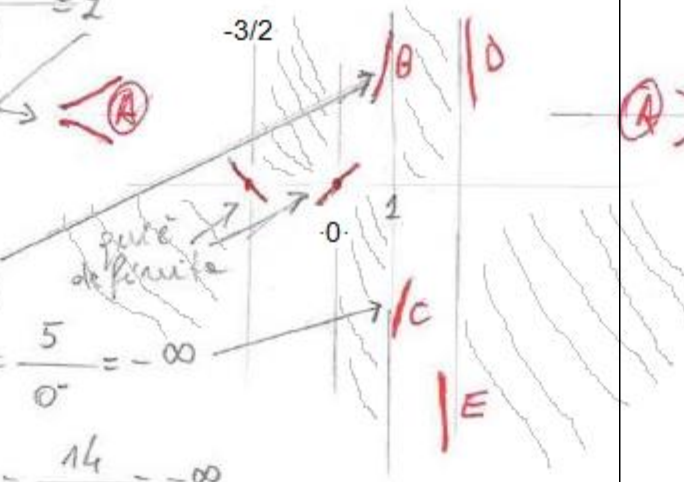
per definirne il dominio $D\ x \neq 1 \text{ e } x \neq 2$
e il segno



osservando il risultato dello studio del segno barriamo con tratteggio le parti dei quadranti dove il grafico della funzione certamente non ci sarà,
annotiamo con tratto rosso l'intersezione con asse x (in x=0 e in x=-2/3) e con l'asse y (in y=0)
annotiamo con tratto rosso l'andamento del grafico dettato dai limiti

$$\text{(A)}\ \lim_{x\to\pm\infty} y = \frac{\infty}{\infty} = \frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{2}{1} = 2$$

va a 2, cioè con asintoto orizzontale
ancora non sappiamo se va a 2^+ (se sarà crescente)
o a 2^- (se sarà decrescente)



$$\text{(B)}\ \lim_{x\to 1^-} y = \frac{5}{0^+} = +\infty \qquad \text{(C)}\ \lim_{x\to 1^+} y = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\text{(D)}\ \lim_{x\to 2^+} y = \frac{14}{0^+} = +\infty \qquad \text{(E)}\ \lim_{x\to 2^-} y = \frac{14}{0^-} = -\infty$$

notiamo un asintoto orizzontale (y=2)
e due asintoti verticali (in x=1 e in x=2)

Passiamo a calcolare la derivata prima per individuare dove la funzione cresce o decresce e dove possa avere massimi o minimi

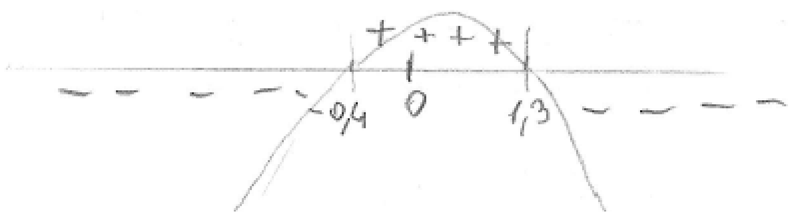
$$y' = \frac{N'\cdot D - ND'}{D^2} = \frac{(4x+3)(x^2-3x+2)-(2x^2+3x)(2x-3)}{D^2}$$

$$= \cancel{4x^3} - 12x^2 + 8x + 3x^2 \cancel{-9x} + 6 \cancel{-4x^3} + 6x^2 - 6x^2 \cancel{+9x} = -9x^2+8x+6$$

essendo questa derivata una frazione, per lo studio del suo segno possiamo ignorare il denominatore perché è sempre positivo;
il numeratore è un'equazione di 2ndo grado: ne cerchiamo il segno con il metodo della parabola (qui rivolta verso il basso per il -9) tra le due soluzioni $x_{1,2}$ individuate con la formula del Δ

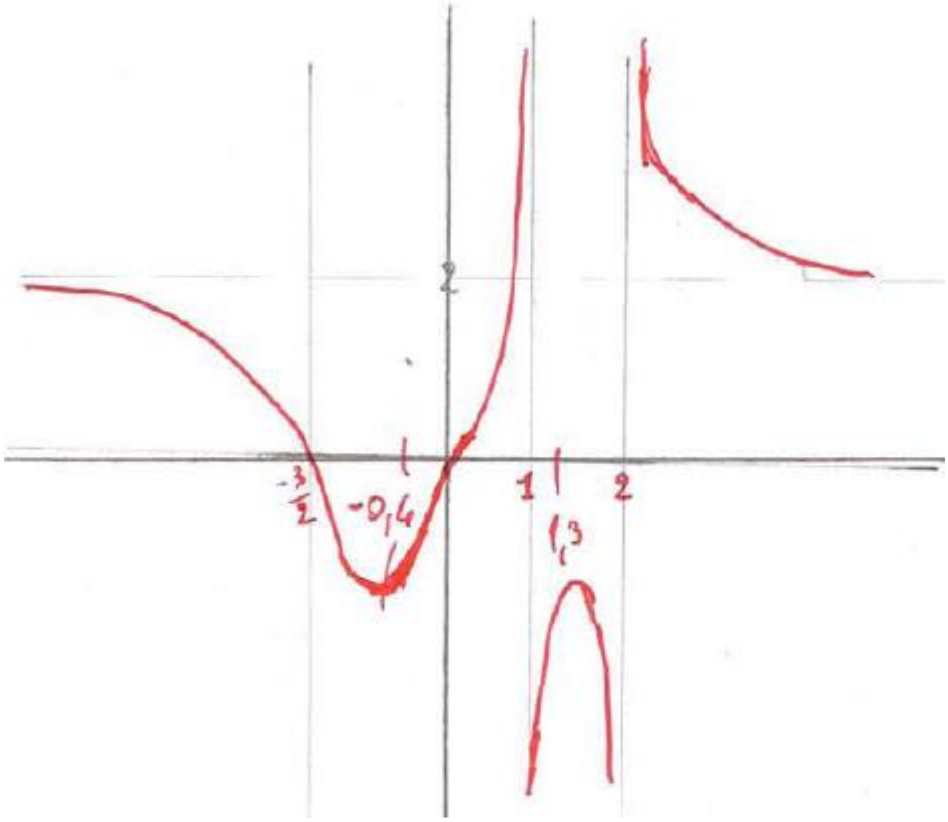
$$x_{1,2} = \frac{8\pm\sqrt{280}}{18} = \frac{8\pm 2\sqrt{70}}{18} \qquad x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{70}}{9}$$

$$x_{1,2} = \begin{cases} \text{circa } 1{,}3 \\ \text{circa } -0{,}4 \end{cases}$$



Osservando il segno della derivata prima, diremo che la funzione
da -∞ a -0,4 decresce; da -0,4 a 1,3 cresce
in x=-0,4 vale zero, quindi x=-0,4 sarà l'ascissa di un punto di minimo (per calcolare l'ordinata y di questo punto inserisci x=-0,4 nella funzioine iniziale)
da 1,3 in poi decresce

in x=1,3 vale zero, quindi x=1,3 sarà l'ascissa di un punto di massimo



↑2013.01.04 studio di funzione fratta

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

Dominio x≠0

segno determinato dal numeratore perché il denominatore è sempre positivo: la funzione sarà positiva per x>-1

ha intersezione con asse x in x=-1

dal risultato dello studio del segno barriamo con tratteggio le parti dei quadranti dove il grafico della funzione certamente non ci sarà,

e poi con l'aiuto dei limiti possiamo già annotare tratti del grafico

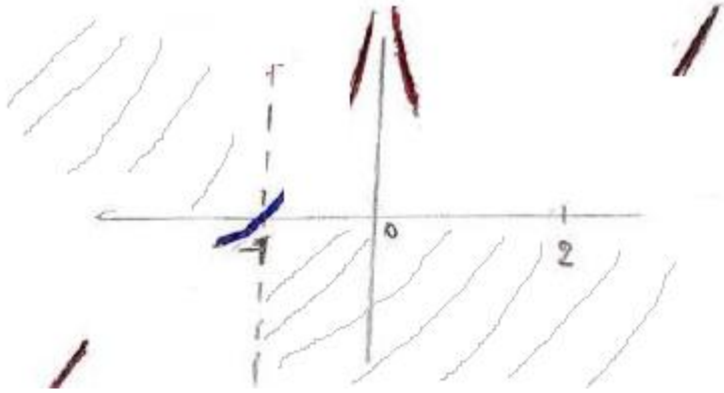
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2} :$$

raccogliendo x^2 al numeratore, che si semplificherà col denominatore, si risolverà la forma di in determinazione ottenendo ∞

analogamente si otterrà che -∞ = lim f(x) per x→-∞

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \quad " \quad = \frac{1}{0^+} = +\infty$$



Passiamo a calcolare la derivata prima per individuare dove la funzione cresce o decresce e dove possa avere massimi o minimi

$$y' = \frac{N' \cdot D - N \cdot D'}{D^2} = \frac{3(x+1)^2 \cdot x^2 - (x+1)^3 \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^2(x^2+2x+1) - 2x(x^3+3x^2+3x+1)}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^4 + \cancel{6x^3} + 3x^2 - 2x^4 - \cancel{6x^3} - 6x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x^4 - 3x^2 -}{x^4}$$

essendo questa derivata una frazione, per lo studio del suo segno possiamo ignorare il denominatore perché è sempre positivo;
il numeratore N(x) è un'equazione di 4° grado, che cerchiamo di scomporre in fattori

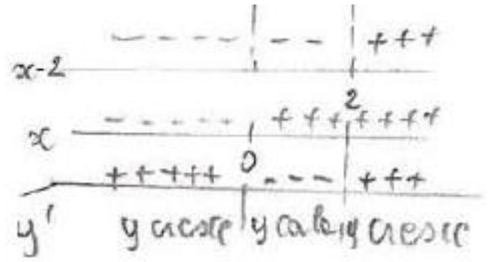
$$x(x^3 - 3x - 2)$$

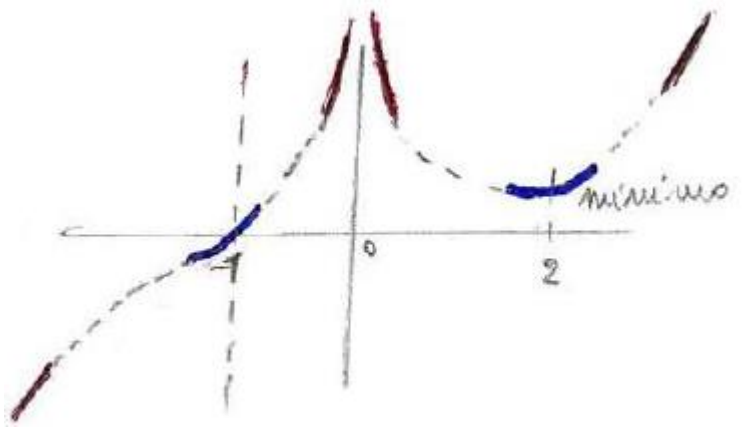
il fattore di terzo grado si può scomporre con Ruffini

$$x^3 - 0 - 3x - 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \cancel{0} \\ -1 & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & \cancel{0} & \end{array}$$

quindi otterremmo che N(x) = x·(x+1)²·(x-2). Ignoriamo il fattore sempre positivo (x+1)² e studiamo gli altri due




mínimo
-1
0
2