INTEGRALI

Tieni presente il <*math.it*> formulario delle derivate e *formulario degli integrali indefiniti* e qui.pdf.
L'integrale indefinito di $f(x)$ è indicato con $\int f(x)\,dx$, ed è l'insieme delle funzioni $F(x)+c$ tale che $F'(x)=f(x)$

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 19/03/2024; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: matematica, derivate, equazioni differenziali

Diario → in calce

Proprietà (invarianza, equivalenze) dell'integrale indefinito: vedi *studenti.it*, con anche tabelle di integrali immediati e per parti

Esempi (casistica, metodi) di integrazione

INTEGRALE INDEFINITO **IMMEDIATO**: la funzione da integrare è una di quelle indicate dal *formulario delle **DERIVATE FONDAMENTALI***

- Può accadere che un integrale non appaia immediato a prima vista, ma che sia riconducibile a somma algebrica di integrali immediati: ad esempio:

$$\int \frac{x^2+3}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1+2}{x^2+1}dx = \int \left(1+\frac{2}{x^2+1}\right)dx = x + 2\arctan x + c$$

- Dalle derivate delle potenze è facile ricavare che

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

il che vale anche per potenze con esponente negativo e/o frazionario

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$$

- Sempre dalle derivate è facile ricordare che $\int e^x\,dx = e^x + c$ e che $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
  e pure è facile ricordare che $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- mentre forse è meno facile ricordare le derivate di certe altre funzioni trigonometriche

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c = -\operatorname{arccotan} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c =$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{cotan} x + c$$

INTEGRALE INDEFINITO del **RAPPORTO N(x)/D(x) TRA DUE POLINOMI** con D(x) di grado 1 o 2: *vedi qui* casistica generale, mentre nel seguito la casistica più semplice

- Integrale indefinito di un **POLINOMIO di x, FRATTO un monomio in x**
  Se dividiamo ciascuna potenza del numeratore per la potenza del denominatore, otterremo una somma di potenze, integrabile come già detto
  lo stesso criterio vale se al denominatore avessimo una potenza di x con esponente frazionario, o perfino un esponenziale come nel seguente caso:

$$\int \frac{e^{2x}+e^{3x}}{e^{4x}}dx = \int e^{-2x}\,dx + \int e^{-x}\,dx = \cdots ..$$

- Integrale indefinito di un rapporto di due binomi di primo grado **mediante SCOMPOSIZIONE**

$$\int \frac{x+a}{x+b}dx = \int \frac{x+b-b+a}{x+b}dx = \int 1\,dx - \int \frac{b-a}{x+b}dx = x-(b-a)\ln|x+b|$$

Lo stesso procedimento si può generalizzare per $\int \frac{x\pm a}{x\pm b}dx$

- Integrale indefinito del **reciproco di due binomi** di primo grado

$$\int \frac{1}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{(x-2)(x+2)}dx = \int \left(\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}\right)dx$$

con a e b tali che facendo il comun denominatore, il numeratore risulti = 1

$$a(x-2)+b(x+2)=(a+b)x+2(b-a)$$

affinché il numeratore risulti =1 occorre che

$(a+b)=0$ e che $(b-a)=\frac{1}{2}$

il che con sistema si ottiene facendo $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$

dal che la primitiva cercata è

$$-\frac{1}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$$

I seguenti altri appunti dovrò riscrivere meglio

- Integrale indefinito del **rapporto tra un binomio di primo grado e un trinomio di 2°** grado con Δ>0
  ∫ (px + q) / (ax + bx + c) dx: il denominatore è scomponibile in fattori di primo grado $(x - x_1)\cdot(x - x_2)$
  e la frazione si può scomporre nella somma di $A/(x - x_1) + B/(x - x_2)$
  con A e B scelti opportunamente in modo che, fatto il comun denominatore,
  il numeratore risulti px + q
  <qui un esempio di svolgimento>
  Se il trinomio di 2° grado fosse il quadrato di binomio $(x\pm a)^2$, tenta il metodo di sostituzione
  <maddmath> ponendo x±a=t
- ∫ **1 / (1 + x^4)** dx: vedi qui come procedere; ed eventuale altri esempi
- Ovviamente tale metodologia si applica anche agli integrali definiti e generalizzati della fattispecie (ad es...)

INTEGRALE INDEFINITO calcolabile col metodo di **SOSTITUZIONE**

- "Tentabile" quando la funzione da integrare "assomiglia" a una di quelle indicate dal formulario delle derivate, tenendo presente la possibilità di indicare un radicale come una potenza
  Esempio1:
  ∫ **1/(x + 5)** dx ci ricorda che ∫ 1/x dx = ln|x| + c,
  quindi riusciremmo a integrare facilmente come ln|x+5| + c, anche senza ricorrere a sostituzioni (x+5=t), ma solo perché la derivata di x+5 è 1.
  Anche questo ∫ **1/(√x + x)** dx ci fa pensare al logaritmo come primitiva, ma qui è necessaria la sostituzione
  possiamo porre √x=t (t>0), cioè $x=t^2$ (è lecito perché x>0 per C.E.);
  differenziando otteniamo dx = 2t dt e sostituiamo
  $2\cdot\int t\,dt/(t + t^2) = 2\cdot\int dt/(1 + t) = 2\cdot\ln(1 + t) + c = 2 \ln(1 + \sqrt{x}) + c$
  non serve indicare il modulo |1+t|, perché t>0 come x>0 per C.E.
  Esempio2:
  ∫ dx / (x - √x); poniamo √x = t (x>0, t>0), cioè $x = t^2$; dx =2t dt
  $\int 2t\,dt / (t^2 - t) = 2 \int dt / (t - 1) = 2\cdot\ln|t - 1| + c =$
  $2\cdot\ln|\sqrt{x} - 1| + c = \ln(\sqrt{x} - 1)^2$.
  Esempio3:
  ∫ **x dx / $(x-1)^{1/2}$**; poniamo $(x-1)^{1/2} = t$, cioè $x-1=t^2$, $x=t^2+1$; dx = 2t dt
  $\int (t^2+1)\,2t\,dt / t = 2\cdot\int (t^2+1)\,dt = 2\cdot[t^3/3 + t] + c =$
  $2t\cdot(t^2/3 + 1) + c = 2(x-1)^{1/2}[(x-1)/3 + 1] + c = \frac{2}{3}(x-1)^{1/2}\cdot(x+2) + c$.
  Esempio:
  ∫ **1/(x^2 + 9)** dx ci parrebbe della forma $\int 1/(x^2 + 1)\,dx$ che sappiamo risultare arctg(x) + c, se non fosse per quel 9 al cui posto avremmo voluto si trovasse 1; anche qui useremo la sostituzione, ma prima cerchiamo di far apparire al denominatore t^2+1;
  $\int 1/[9(x^2/9 + 1)]\,dx = 1/9 \int 1/[(x/3)^2 + 1]\,dx$
  pongo x/3 = t, ricavo x = 3t, dx = 3 dt, sostituisco
  $1/9 \int 1/(t^2 + 1)\,3\,dt = 1/3 \int 1/(t^2 + 1)\,dt = 1/3$ arctg(t) + c;
  1/3 arctg(x/3) + c.
- "Tentabile" quando nel prodotto di due funzioni intuiamo che una sarebbe la derivata dell'altra a meno di qualche coefficiente (costante moltiplicativa), perché sappiamo che nella derivazione di una funzione composta (FUNZIONE DI FUNZIONE) compare sempre il prodotto per la derivata dell'argomento; tali forme sarebbero integrali immediati di funzioni composte, ma il metodo di sostituzione, anche se più prolisso, può aiutare nei primi passi fino ad impratichirsi con l'immediatezza.
  Esempio
  ∫ **sin(x)·cos(x)** dx

osserviamo che cos(x) è la derivata di sin(x), quindi potremmo trovare la primitiva in modo quasi immediato, ma procediamo per sostituzione: t = sin(x) → dt = cos(x) dx

$\int t\, dt = t^2/2 + c = \frac{1}{2}\sin^2(x) + c$

facciamo la prova: $(\frac{1}{2}\sin^2 x + c)' = \sin(x)\cdot\cos(x)$, come ci aspettavamo.

Esempio:

$\int$ **sin(2x)·cos(x)** dx non si può trattare direttamente come sopra essendo diversi gli argomenti delle due funzioni trigonometriche;

tuttavia, possiamo applicare la formula di duplicazione sin(2x) = 2 sin(x) cos(x),

$\int 2 \sin(x) \cos(x) \cos(x)\, dx = 2 \int \sin(x) \cos^2(x)\, dx$

ponendo t = cos(x) → dt = - sen(x) dx

$-2 \int t^2\, dt = -2/3\, t^3 + c = -2/3\cdot\cos^3 x + c$

Esempio:

$\int$ **x·sen(x²)** dx; poniamo $x^2 = t$; $2x\, dx = dt$; $x\, dx = \frac{1}{2}dt$

$\frac{1}{2}\int \text{sen}(t)\, dt = -\frac{1}{2} \cos(t) + c = -\frac{1}{2} \cos(x^2) + c$

Esempio:

$\int$ **cos(x) sen²(x)** dx; poniamo sen(x) = t; deriviamo cos(x) dx = dt;

$\int t^2\, dt = t^3/3 + c = \frac{1}{3}\text{sen}^3(x) + c$

Esempio (analogo al precedente):

$\int$ **sin(x)·cos⁴x** dx = $-1/5 \cos^5 x + c$

Esempio:

$\int$ **ln(x⁷) / x** dx = $\int 1/x\ 7\cdot\ln(x)\, dx = 7 \int 1/x \ln(x)\, dx$

poniamo ln(x) = t, deriviamo dx/x = dt e sostituiamo

$7\cdot\int t\, dt = 7\, t^2/2 + c = 7/2 \ln^2 x + c$

Esempio:

$\int$ **e²ˣ / (e²ˣ + 1)** dx

pongo $e^{2x} + 1 = t$ → $2 e^{2x} dx = dt$ → $e^{2x} dx = \frac{1}{2}dt$ e sostituiamo

$\frac{1}{2}\int dt / t\, dx = \frac{1}{2}\ln(t) + c = \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1) + c$

Esempio:

$\int$ **x·(x - 3)^1/3** dx pongo x - 3 = t, ricavo x = t+3, dx = dt

$\int (t + 3)\cdot t^{1/3}\, dt = \int (t^{4/3} + 3t^{1/3})\, dt = 3/7 t^{7/3} + 9/4 t^{4/3} + c.$

Esempio

$$\int \frac{x^3}{x^2-4} dx = \int x \frac{x^2-4+4}{x^2-4} dx$$ (vedi qui#166)

INTEGRALE INDEFINITO calcolabile col metodo di **INTEGRAZIONE PER PARTI**

- se $\int f(x)\cdot g(x)\, dx$ si può scrivere come $\int f(x)\cdot G'(x)\, dx$ allora
  $\int f(x)\cdot g(x)\, dx = f(x)\cdot G(x) - \int f'(x)\cdot G(x)\, dx$
  Integrale(Primitiva1·Derivata2) = Primitiva1·Primitiva2 – integrale(Derivata1·Primitiva2)
- da <*uniroma*> leggiamo casi un po' particolari: ad es. si possono integrare per parti $\int \sin^2 x\, dx$, $\int (\log x)^2\, dx$, $\int \arctan x\, dx$.
  si può integrare per parti anche più volte, come ad es $\int \sin(x)\cdot e^x\, dx$.

INTEGRALI DEFINITI (vedi anche la dimostrazione dell'integrale definito *secondo Riemann*)

AREA *della superficie di piano* sottesa tra x=a e x=b dal grafico di una funzione f(x) integrabile quantomeno nell'intervallo [a,b]. Si assume che l'area abbia valore negativo quando la f(x) è negativa (*vedi qui disegno*). Detta F(x) la primitiva di f(x), tale area sarà

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

e per il Teorema della *media integrale*, detta anche valor medio integrale, avremo

$$M(f,[a,b]) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) dx$$ (qui esempio)

AREA TRA DUE CURVE f(x) e g(x)

Individuati i 2 punti (di ascissa a, b) di intersezione delle due curve (ma il ragionamento si potrebbe estendere a più di due punti di intersezione) si individua nell'intervallo [a,b] quale sia la funzione superiore e quella inferiore (vedi qui figura);

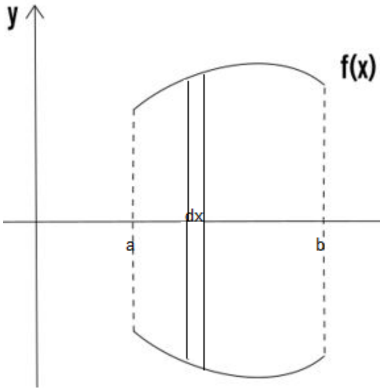
dividiamo la superficie delimitata dalle due curve in tanti rettangolini verticali aventi base infinitesimale dx

altezza $h(x) = f(x) - g(x)$ se la $f(x)$ fosse la funzione superiore (o viceversa se fosse inferiore);
l'area di quella superficie tra le due curve è la sommatoria tra a e b di tali rettangolini:
Tale area = $\int_a^b h(x)dx = H(b) - H(a)$
Qui alcuni esercizi risolti

PRIMITIVA DI UNA f(x) definita per intervalli consecutivi
Definire la funzione analitica della primitiva di una funzione avente per grafico una linea spezzata: ricordati di fare ACCUMULO: la primitiva per ogni intervallo va aggiunta al valore che aveva la primitiva del precedente intervallo calcolata nell'estremo superiore del medesimo
esempio1, esempio2.

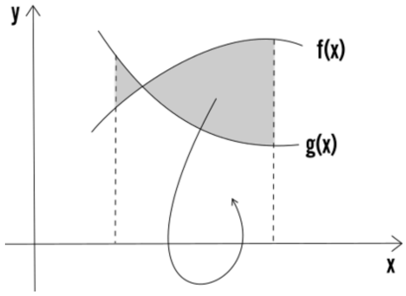
VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE
Vedi qui alcuni esercizi svolti

1) VOLUME di un SOLIDO DI ROTAZIONE attorno all'asse x, con sezione delimitata da una f(x) (trapezoide) nell'intervallo [a,b]



Volume$_x$ = $\pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$); in <*youmath*> vedresti la dimostrazione della formula.

2) VOLUME di un SOLIDO DI ROTAZIONE attorno all'asse x, con sezione delimitata da **due funzioni f(x) e g(x)** entrambe concordemente positive o negative nell'intervallo [a,b]; se non fossero concordi di segno in qualche sub-intervallo di [a,b], la rotazione di 360° generebbe un solido che si autointerseca, casistica che qui non trattiamo.



$$\text{Volume} = \pi \int_a^b |(f(x))^2 - (g(x))^2| dx$$

Il modulo | | non sarebbe necessario se in tutto l'intervallo [a, b] fossimo certi che la $f^2(x) \geq f^2(x)$
Per facilitare il ricordo di questa formula, pensa alla precedente osservando che qui al trapezoide pieno delimitato dalla funzione più esterna occorre togliere il trapezoide cavo delimitato dalla funzione più interna.

3) E SE LA ROTAZIONE AVVENISSE ATTORNO ALL'ASSE y?
Non tutte le funzioni sono invertibili, ma ove fosse possibile, si calcolerebbero le funzioni inverse, si definirebbe il nuovo intervallo di integrazione e si precederebbe come nei casi precedenti a seconda che il solido di rotazione sia pieno come una torta (caso 1) o cavo come una ciambella (caso 2).
Sempre che la funzione si invertibile, si può applicare anche il *metodo dei gusci* *cilindrici:* tubo di raggio x, altezza f(x), spessore dx, quindi area base 2π·x·dx, Vol 2π·∫ x·f(x)·dx.
Ad esempio. ... Vedi qui alcuni esercizi svolti

INTEGRALI DEFINITI calcolati con METODI NUMERICI approssimativi
- con la *formula dei trapezi* (ad *esempio*...), con la *formula dei rettangoli*, con la formula di Cavalieri-Simpso-n
- qui una tabella excel con esempi di calcolo numerico secondo le tre suddette formule

PROBLEMI RISOLVIBILI CON GLI INTEGRALI
- scarabocchi.pdf per la soluzione di alcuni esercizi

DIARIO

↑2024.03.05 data~ scarabocchi per lo svolgimento di alcuni esercizi:
- integrali INDEfiniti (195 251 252).pdf, (63 … 185).pdf, (186 … 596).pdf
- derivata di integrale mobile:

  data la funzione $f(x) = \int_0^{b(x)} h(t)dt$

  calcolare la $f'(x)$ senza determinare l'espressione analitica dell'integrale; qui la spiegazione con alcuni esempi, e con il #58 svolto in modo diverso rispetto al risultato indicato dal testo.
- integrali DEfiniti: da pag.386 #166 206 210 388 304