EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Del primo ordine e del secondo ordine. Vedi ad es. <youmath> per una trattazione molto più esaustiva dei seguenti poveri appunti e in particolare per il significato dei termini coinvolti: cosa sia una equazione differenziale, il suo ORDINE, se essa sia LINEARE o no, a COEFFICIENTI COSTANTI o no, OMOGENEA o no (a seconda del TERMINE NOTO), cosa si intenda per Problema di CAUCHY, ...
Si dà per scontata la conoscenza della <math.it> derivazione e della integrazione di funzioni.
Perdonami le ingenuità, ma **segnalami eventuali errori,** per favore.

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 16/02/2022; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: matematica, integrali, derivate

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL **PRIMO ORDINE LINEARE** <youmath>

è quella che in *forma normale* è riconducibile a $y' = a(x)y + b(x)$ cioè un'equazione in cui sia la funzione *y*, intesa come incognita *f(x),* sia la sua derivata prima *y'* compaiono come incognite di una relazione lineare (cioè di una equazione del tipo equazione di una retta), ovvero incognite con potenza di grado 1.
Se le potenze di *y* e *y'* non fossero di grado 1 l'equazione non si direbbe LINEARE; se comparisse anche la derivata seconda *y"* come incognita, l'equazione non sarebbe più del PRIMO ORDINE, ma del secondo ordine.
La soluzione è una famiglia di funzioni *f(x)* individuabile dalla seguente formula

$$y = e^{A(x)} \int e^{-A(x)}\ b(x)\, dx \quad \text{dove } A(x) = \int a(x)dx$$

In internet puoi trovare dovizia di esempi con soluzione; di seguito un esempio semplice
scriviamo l'equazione $y' + 2xy = x$ in *forma normale* come $y' = -2xy + x$
in tale forma consideriamo a(x) = -2x, b(x) = x
integrando a(x) otteniamo A(x) = $-x^2$ e applichiamo la suddetta formula per trovare la soluzione
$y = e^{-x^2} \int e^{x^2}\, x\, dx = e^{-x^2}(\frac{1}{2}e^{x^2} + k) = \frac{1}{2} + ke^{-x^2}$
Altri esempi semplici:
- verifica che l'equazione $y' + y = x$ ha per soluzione la famiglia di funzioni $y = ke^{-x} + x - 1$
- verifica che $y' + y = 0$ ha per soluzione la famiglia di funzioni $y = ke^{-x}$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL **PRIMO ORDINE A VARIABILI SEPARABILI** <youmath>

è quella che in *forma normale* è riconducibile a $y' = a(x)b(y)$.
In tale forma vediamo che una soluzione costante sarebbe quella per cui b(y)=0; a questa eventuale soluzione aggiungiamo le soluzioni non costanti ottenibili considerando che $y' = \frac{dy}{dx}$
dal che possiamo trascrivere la suddetta forma come $\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$
e anche come $\frac{dy}{b(y)} = a(x)dx$: avendo così separato le variabili y ed x e possiamo procedere integrando i due membri dell'equazione

$$\int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(x)\ dx$$

In internet puoi trovare dovizia di esempi con soluzione, ad es $xy' - y = 2\sqrt{x}$ facile lineare;
oppure $y' - y\, sinx = 4sinx$ risolvibile sia come lineare sia a variabili separabili

$y' = sinx(y+4)$ $\frac{y'}{y+4} = sinx$ $\frac{dy}{y+4} = sinx\ dx$ $\ln(y+4) = -cosx + c$ $y = ce^{-cosx} - 4$	$y' = y\, sinx + 4sinx$ $a(x) = sinx\,;\ \ A(x) = -cosx;\quad b(x) = 4sinx$ $y = e^{-cosx}\, 4 \int e^{cosx}\, sinx\ dx$ $y = e^{-cosx}\,(-4)(e^{\,cosx}$+c) $y = -4e^0 - 4ce^{-cosx}$ $y = -4 + ce^{-cosx}$

Nota la soluzione costante y=-4 per $\forall$x, che si sarebbe potuta individuare fin dall'inizio, oltre che ricavabile (per c=0) dalla soluzione generale.
Altri esempi troveresti in questa pagina alle varie date (ad es. 2020.03.08);
qui di seguito un altro esempio
$y' = x^2y^2 - 4x^2$ si può scrivere anche come $y' = x^2(y^2 - 4)$ dal che a(x)=x^2 e b(y)=(y^2-4)
Individuiamo subito due soluzioni costanti y=±2 $\forall$x; per le altre (non costanti, famiglia di soluzioni) procediamo come suddetto

$$\int \frac{1}{y^2-4}\,dy = \int x^2\ dx$$
$$\int \frac{1}{(y+2)(y-2)}\,dy = \frac{x^3}{3} + k$$

$$\frac{1}{4}\ln\frac{y-2}{y+2} = \frac{x}{3} + k$$

$$\frac{y-2}{y+2} = e^{\frac{4}{3}x^3+k}$$
dal che con alcuni passaggi si perviene a
$$y = 2\frac{1+ke^{\frac{4}{3}x^3}}{1-ke^{\frac{4}{3}x^3}}$$
famiglia di soluzioni variabili al variare di k ciascuna delle quali sarebbe valida per ogni x purché ≠ dal valore che facesse azzerare il denominatore, cioè
$$x\ \neq -\sqrt[3]{\frac{3}{4}\ln k}$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL **SECONDO ORDINE LINEARE OMOGENEA** <youmath>
è quella che in *forma normale* è riconducibile a $ay'' + by' + cy = 0$, con *a*, *b*, *c* numeri reali (per questo l'equazione si dice anche a coefficienti costanti) e termine noto = 0 (se il termine noto non fosse = 0, l'equazione si direbbe non omogenea).
Per cercare le soluzioni di tale equazione si passa attraverso l'**equazione caratteristica associata** $ar^2 + br + c = 0$ le cui soluzioni saranno reali se Δ ≥ 0 o complesse coniugate se Δ < 0;
- Se Δ > 0, dette r_1 ed r_2 le soluzioni della suddetta equazione associata, avremo $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ con c_1 e c_2 reali qualunque
- Se Δ = 0, detta r_0 l'unica soluzione dell'equazione associata, avremo $y = e^{r_0x}(c_1 + c_2x)$
- Se Δ < 0, dette (α ± iβ) le due soluzioni complesse coniugate, avremo $y = e^{\alpha x}\ (c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x)$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL **SECONDO ORDINE LINEARE NON OMOGENEA** (vedi <youmath> per una trattazione più sistematica)
è quella che in *forma normale* è riconducibile a $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ con *a*, *b*, *c* numeri reali.
Si risolve aggiungendo alle soluzioni della equazione omogenea associata una **soluzione particolare**, che possiamo individuare con metodi diversi.
Vedi questo.yt per il metodo della variazione delle costanti.
Qui affronteremo invece il **metodo delle somiglianze** <yt> che permette di risolvere un'equazione non omogenea **soltanto** nei casi in cui la $f(x)$ sia una funzione polinomiale, o esponenziale o una goniometrica del tipo appresso indicato (o una somma algebrica di tali tipi).

Se $f(x)$ è un $P_n(x)$ essendo $P_n(x)$ un polinomio di grado n	**Se 0 non è radice** dell'equazione caratteristica, allora cerca un integrale del tipo $g(x) = P_n(x)$ polinomio di grado n **Se 0 è radice** singola dell'equazione caratteristica , allora cerca un integrale del tipo $g(x) = xP_n(x)$ **Se 0 è doppia** dell'equazione caratteristica , allora cerca un integrale del tipo $g(x) = x^2P_n(x)$
Se $f(x) = he^{kx}$	**Se k non è radice** dell'equazione caratteristica, allora cerca un integrale del tipo $g(x) = Ae^{kx}$ **Se k è radice singola** dell'equazione caratteristica, allora cerca un integrale del tipo $g(x) = Axe^{kx}$ **Se k è radice doppia** dell'equazione caratteristica, allora cerca un integrale del tipo $g(x) = Ax^2e^{kx}$
Se $f(x) = h\ sin\ kx$ Oppure $f(x) = h\ cos\ kx$	**Se $\pm ik$ non sono radici complesse** dell'eq. car., allora cerca un integrale del tipo $g(x) = A\sin kx + B\cos kx$ **Se $\pm ik$ sono radici complesse** dell'eq. car., allora cerca un integrale del tipo $g(x) = x(A\sin kx + B\cos kx)$

=== esempi ed appunti PER DATA ===============

↑2020.04.24 <pdf> data una funzione verificare se è o no integrale (soluzione di una data equazione differenziale)

↑2020.03.08 equazione differenziale **a variabili separabili** che serve per trovare la funzione che descrive una curva logistica (o crescita logistica), tipica di una popolazione che cresce esponenzialmente all'inizio, ma poi, diminuendo le risorse disponibili per la crescita, rallenta la crescita fino a non crescere più.

L'equazione cosiddetta "logistica" è

$y' = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$ dove

- y(t) è la funzione di crescita logistica che troveremo come soluzione della suddetta equazione differenziale,
- k è la costante di crescita che sarà assegnata per una specifica popolazione,
- M è il numero massimo di elementi raggiungibile dalla crescita della popolazione.

La soluzione dell'equazione ci porterà ad una famiglia di curve, variabili a seconda di un parametro c, che potrà essere fissato modo Cauchy, conoscendo, ad esempio, il valore della popolazione iniziale al tempo t=0, che per comodità di riferimento nel seguito chiameremmo z [y(0)=z].

Trattiamo l'equazione con la modalità "a variabili separabili"

$$\frac{y'}{y\left(1 - \frac{y}{M}\right)} = k$$

$$\int \frac{dy}{y\left(1 - \frac{y}{M}\right)} = \int kdt$$

integriamo a sinistra con la modalità di trovare A e B tali che $\frac{1}{(binomio1)(binomio2)} = \frac{A}{binomio1} + \frac{B}{binomio2}$

(A e B si trovano facendo sì che A·(binomio2) + B·(binomio1) sia uguale a 1.

$$\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{\frac{1}{M}}{\left(1 - \frac{y}{M}\right)} dy = \int kdt$$

$\ln y + \frac{1}{M}\ln(1 - \frac{y}{M})(-M) = kt + \text{c} \;\rightarrow\; \ln y - \ln(1 - \frac{y}{M}) = kt + \text{c}$

$$\ln \frac{y}{1 - \frac{y}{M}} = kt + c$$

$$\frac{y}{1 - \frac{y}{M}} = e^{kt+c} = e^{kt+c}$$

possiamo scrivere $e^{kt+c} = ce^{kt}$ perché $e^{kt+c} = e^{kt}e^{c}$, ma essendo c una costante qualunque, anche e^{c} è una costante qualunque e dunque può essere scritta semplicemente come c; dunque

$\frac{y}{1-\frac{y}{M}} = \text{c}e^{kt}$

Prima ancora di esplicitare la y(t) potremmo nella suddetta famiglia di soluzioni individuare quella definita con la condizione iniziale y(o)=z quando t=0

$\frac{z}{1-\frac{z}{M}} = \text{c}e^{0} \rightarrow \frac{z}{\frac{M-z}{M}} = \text{c} \rightarrow C = \frac{Mz}{M-z}$

Scriviamo la y(t) in forma esplicita

$\frac{y}{\frac{M-y}{M}} = \text{c}e^{kt} \rightarrow My = \text{c}e^{kt}\text{(M-y)} \rightarrow \text{c}e^{kt}\text{(M-y) - My = 0} \rightarrow \text{Mc}e^{kt}\text{- yc}e^{kt}\text{ - My = 0}$

$\text{- y(c}e^{kt}\text{ + M) = - Mc}e^{kt}$

$$y = \frac{Mce^{rt}}{ce^{kt} + \text{M}}$$

così avremmo finito, ma, solitamente, la *funzione logistica* si scrive in una espressione diversa, in funzione dei parametri M e z, come di seguito ricaveremo:
dividendo numeratore e denominatore per ce^{kt} e otteniamo

$$y = \frac{M}{1 + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{c}} e^{-kt}}$$

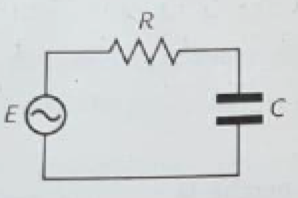
sostituiamo a c il suo valore in funzione di M ($C = \frac{Mz}{M-z}$) ed otteniamo

$$y = \frac{M}{1 + \frac{\mathrm{M-z}}{\mathrm{z}} e^{-kt}}$$

Se, ad esempio, avessimo un caso particolare in cui k=0,4, M=500, z=50, la funzione logistica di quel caso particolare sarebbe

$$y = \frac{500}{1 + 9e^{-0,4t}}$$

↑2020.03.07 equazione differenziale lineare che serve per trovare la funzione che descrive l'andamento della carica nel tempo, q(t) sul condensatore del seguente circuito



sapendo che per la legge di Ohm

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

essendo R il valore della resistenza, C quello della capacità del condensatore, E quello della forza elettromotrice

$$Rq' = -\frac{q}{C} + E$$

$$q' = -\frac{q}{RC} + \frac{E}{R}$$

$$q(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \int e^{\frac{t}{RC}} \frac{E}{R} dt$$

esporto E ma lascio dentro 1/R che mi serve da semplificare con la derivata dell'esponente

$$q(t) = e^{-\frac{t}{RC}} E(e^{\frac{t}{RC}} RC \frac{1}{R} + k)$$

oppure esporto E/R

$$q(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \frac{E}{R} (e^{\frac{t}{RC}} RC + k)$$

e poi semplifico RC col denominatore R, restando C, e divido k per R, lasciando scritto k, perché k è una costante qualunque
(siccome intendiamo k una costante qualunque, possiamo considerare qualsiasi operazione su k uguale a k, non solo il già trovato $e^k \simeq k$, ma anche $\frac{k}{R} \simeq k$)

$$q(t) = e^{-\frac{t}{RC}} E(e^{\frac{t}{RC}} C + k)$$

$q(t) = E(C + ke^{-\frac{t}{RC}})$ famiglia di funzioni al variare di k

mediante la condizione iniziale q(0) = 0, andiamo a fissare k e dunque la funzione q(t) richiesta come unica soluzione

la condizione iniziale $0 = E(C + k)$ è vera solo se $k = -C$, quindi ...

$$q(t) = E(C - Ce^{-\frac{t}{RC}})$$

$$q(t) = EC(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

↑2020.03.05 <propostaDiEsercizi.noweb>