Mini aiuto allo studio in TRIGONOMETRIA: mix di esercizi miei e di attinti da varie fonti

Formulario di Trigonometria+appendice; archi associati.
<ProfRaffaeleSantoro> Definizioni, formule, equazioni e disequazioni goniometriche.
Esercizi *da svolgere* su identità ed equazioni goniometriche.
Funzione lineare in sin e cos $y = a\sin x + b\cos x + c$ è scrivibile come $y = A\sin(x+\varphi) + c$
Equazione lineare in seno e coseno col metodo grafico
Equazione di 2° grado omogenea in seno e coseno (si divide per $\cos^2 x$Formulario per derivate e integrali di funzioni goniometriche.
<xls> Risolvere il triangolo rettangolo essendo noti due valori (di lato e angolo)
Se tu trovassi errori o ingenuità in questa pagina, ti pregherei di dar**me**ne segnalazione: grazie!
<*magaz*> non furono i greci ad inventare la trigonometria, ma i babilonesi, 1000 anni prima: lo si deduce dalla tavoletta di argilla denominata Plimpton 322, risalente all'epoca del Re Hammurabi (~3.700 anni fa).

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 11/12/2023; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: matematica x medie e sup; apprendimento, conoscenza, formazione; e-learning

↑2023.01.08 soluzione (scusa gli scarabocchi) di alcuni esercizi sfruttando il *teorema della corda* ($AB = 2\,r\sin\theta$ dove θ è un qualunque angolo alla circonferenza che insiste su uno dei due archi individuati dagli estremi del segmento sulla circonferenza di raggio r).
#104 Data una circonferenza di centro O e raggio r, considera la corda $AB = \frac{r}{2}$ e calcola il valore di seno e coseno dell'angolo convesso $\widehat{AOB}$.
#109 Due corde consecutive di una circonferenza di raggio r sono tali che $AB = \frac{r}{2}$, $BC = \frac{3}{2}r$ e $\widehat{ABC}$ è ottuso. Calcola l'area del triangolo ABC.
#110 In una circonferenza di raggio r considera due corde di misure $AB = r\sqrt{2}$ e $BC = \frac{6}{5}r$, tali che $\widehat{ACB}$ sia acuto. Determina la misura della corda AC. Comer cambierebbe la risposta se $\widehat{ACB}$ fosse ottuso?

↑2022.11.03 $\sqrt{\cos 2x} \le \sin x - \cos x$

Per prima cosa le C.E.: $\begin{cases} \cos 2x \ge 0 \\ \sin x - \cos x \ge 0 \end{cases} \begin{cases} perché\ è\ argomento\ di\ radice\ pari \\ perché\ è \ge di\ una\ radice\ pari (che\ è\ sempre\ positiva) \end{cases}$

Risolviamo le C.E. per individuare gli intervalli di esistenza sull'asse delle x;

C.E.1: $\cos 2x \ge 0 \to -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + 2k\pi \to -\frac{\pi}{4} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{4} + k\pi$

Per brevità non risolviamo qui la C.E.2, ma ci impegniamo a verificare che la soluzione finale sia compatibile anche con la C.E.2. (Per inciso, se si tentasse di risolvere la C.E.2 come alla riga seguente

$\sin x - \cos x \ge 0 \to \sin x \ge \cos x \to$ dividiamo per $\cos x \to \tan x \ge 1$

si commetterebbe un errore, perché $\cos x$ può essere anche negativo, e, in tal caso, si invertirebbe il verso della disequazione in $\tan x$; per risolvere $\sin x - \cos x \ge 0$ vedi eventualmente qui).

Sotto la condizione che $(\sin] x - \cos[(x)$ sia maggiore o uguale a zero, possiamo elevare al quadrato entrambi i membri della disequazione, ottenendo

$$\cos 2x \le \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x \le \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x$$
$$-2\sin^2 x + 2\sin x\cos x \le 0$$
$$-2\sin x\,(\sin x - \cos x) \le 0$$
$$\sin x\,(\sin x - \cos x) \ge 0$$

siccome siamo sotto condizione che $(\sin x - \cos x)$ ≥0, possiamo semplicemente scrivere

$$\sin x \ge 0$$
$$0 + 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$$

Quanto di questo intervallo tra zero e π è accettabile rispetto alle due C.E.?

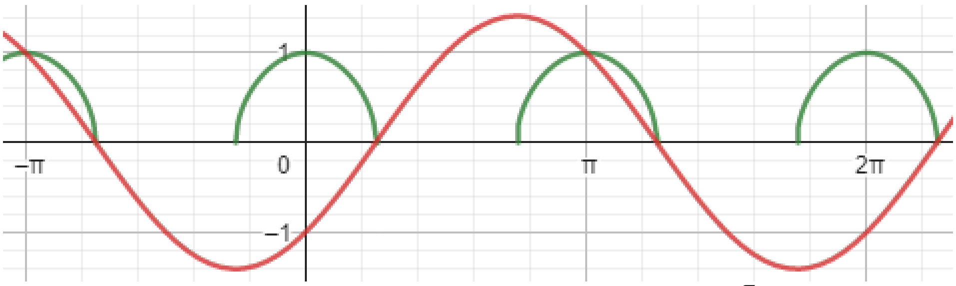
Per la C.E.1 sarebbe accettabile l'intervallo $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ e (con $k = 1$) l'intervallo $\frac{3\pi}{4} \le x \le \pi$

Per la C.E.2 non possiamo accettare l'intervallo tra zero e $\frac{\pi}{4}$ perché lì $\sin x - \cos x < 0$, possiamo accettare solo $x = \frac{\pi}{4}$ dove $\sin x - \cos x = 0$. Per la C.E.2 è invece accettabile l'intervallo $\frac{3\pi}{4} \le x \le \pi$ perché lì il $\cos x$ è negativo e, quindi, $\sin x - \cos x > 0$. Concludendo le soluzioni sono

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi$$

la qual cosa potremmo verificare anche graficamente ad esempio con *Geogebra*

in verde la $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$, in rosso la $\mathrm{f(x)} = \sin x - \cos x$



Annoto che qualche testo ignora la soluzione $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

↑2022.11.01 [qui]() la soluzione della disequazione $2\tan x + \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$

↑2022.10.31 risolviamo la disequazione $2\sin^2 x - \cos x - 1 > 0$ Sostituendo $\sin^2 x$ con $1 - \cos\ \ ^2 x$ arriviamo a $-2\cos\ \ ^2 x - \cos x + 1 > 0$ equazione di 2° grado in $\cos x$ che porta alla soluzione $-1 < \cos x < \frac{1}{2}$; se disegniamo una circonferenza goniometrica vediamo che gli archi x che hanno coseno tra -1 e $\frac{1}{2}$ sono quelli che stanno "tra". $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$, ma, attenzione! Il valore -1 per il $\cos x$ è escluso, mentre nel suddetto "tra" ci sarebbe anche il valore $x = \pi$, quindi al suddetto "tra" dobbiamo aggiungere ESCLUSO $x = \pi + 2k\pi$.
Se ci fosse assegnata da risolvere la disequazione $2 - 2\cos\ \ ^2 x > 3\cos x$, perverremmo alla soluzione $-2 < \cos x < \frac{1}{2}$ che però, essendo -1 il valore minimo di $\cos x$, si riduce a $-1 \leq \cos x < \frac{1}{2}$ dal che otterremo la stessa soluzione "tra" dell'esercizio precedente, ma qui senza l'ESCLUSIONE, perché qui il valore -1 è ammesso per $\cos x$.

↑2022.10.09 [risoluzione di alcune]() equazioni trigonometriche
- #342 $\sin^2 x + \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 1$onducibile a una [*equazione omogenea*]()
- #347 $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2(\pi - x) = 1$
- #348 $tanx = 2\sin^2 x$2022.03.16 dalla formula $cos2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 n^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$alla formula $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ ricaviamo $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ dal che una funzione del tipo $y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + \ c\cos^2 x + d$ può essere scritta come una funzione lineare di $\sin 2x$ e $\cos 2x$: $y = a\sin 2x + b\cos 2x + c$.

A sua volta una **funzione lineare in seno e coseno** $y = a\sin x + b\cos x + c$ si può riscrivere nella forma equivalente

$$y = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi) + c$$

essendo φ un angolo tale che $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

↑2022.03.14 <p121#234> nel fascio di rette passanti per $P(0{,}2)$ individua l'equazione delle due rette che formano con la retta $y = x$ un angolo di 30°.
Soluzione: indicati con m_1 ed m_2 le pendenze di due rette incidenti nel piano sappiamo che la loro intersezione forma un angolo γ tale che

$$\tan\gamma = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

(nel caso che le due rette siano tra loro ortogonali, il denominatore sarebbe zero, e in tal caso la suddetta formula avrebbe significato come limite).

Assumiamo che m_1 sia la pendenza della retta $y = x$ e dunque $m_1 = 1$.

$$\tan 30\,° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \left|\frac{1 - m_2}{1 + m_2}\right|$$

Sdoppiamo il modulo in due equazioni

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1 - m_2}{1 + m_2}$ $\sqrt{3} + \sqrt{3}m_2 = 3 - 3m_2$ $m_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}\ \text{razionalizz.}\frac{(3 - \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})} =$	$\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1 - m_2}{1 + m_2}$ $\sqrt{3} + \sqrt{3}m_2 = -3 + 3m_2$ $m_2 = \frac{-3 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3}\ \text{razionalizz.}\frac{(\sqrt{3} + 3)}{(\sqrt{3} + 3)} =$

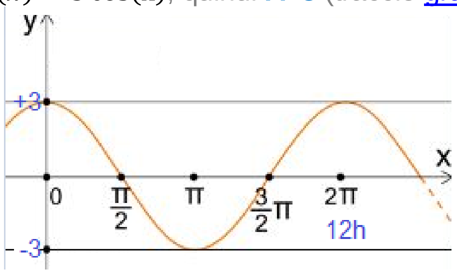
$= \frac{9+3-6\sqrt{3}}{9-3} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$	$= \frac{-(9+3+6\sqrt{3})}{3-9} = \frac{-(12+6\sqrt{3})}{-6} = 2+\sqrt{3}$

Nel fascio di rette $y-2=mx$ passanti per P le due rette cercate sono $y=(2\pm\sqrt{3})x+2$

↑2021.11.20 L'altezza dell'acqua in una località balneare è descritta da un modello periodico dato dalla funzione $h(t) = A\cos(Bt + C)$ dove A, B, C sono delle costanti, t è il tempo (in ore, a partire dalla mezzanotte t=0) e h è l'altezza (in metri) rispetto a un *riferimento fissato*. Sappiamo che un *ciclo alta/bassa marea* ha una durata complessiva di 24 ore, che *l'altezza massima dell'acqua è di 6 metri* e che *a mezzogiorno l'altezza dell'acqua è di 3 metri*.
- Determina i valori di A, B, C.
- Rappresenta il grafico di h(t) su un intervallo di tempo 0<t<24 e determina l'altezza dell'acqua a mezzanotte e alle ore 18.

[CzzC: presumiamo i seguenti intendimenti:
- per "*l'altezza massima dell'acqua è di 6 metri*" intendiamo l'**escursione** tra alta e bassa marea;
- per "*riferimento fissato*" intendiamo il minimo di bassa marea, quindi escursione tutta positiva;
- per "*ciclo di alta/bassa marea*" intendiamo quello naturale sulla Terra, durante il quale in circa 24 ore si verificano due alte e due basse maree, dunque il ciclo di alta-bassa marea ha periodo 12 ore.

Con i suddetti intendimenti, partiamo dal grafico della funzione cos $h(x) = \cos(x)$ e procediamo col metodo delle trasformazioni. La funzione $\cos(x)$ ha un'escursione di 2 (da -1 a +1): perché abbia un'escursione di 6 deve essere $h(x) = 3\cos(x)$, quindi **A=3** (traccio grafico con aiuto di youmath)



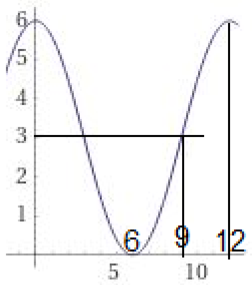
La suddetta $h(x)$ ha periodo 2π, la corrispondente $h(t)$ ha periodo 12h; cambiando la variabile da x misurata in radianti, a t misurata in ore, dobbiamo far coincidere il periodo, cioè far sì che il punto t=12 coincida con il punto x=2π, il che otteniamo ponendo $x = \frac{2\pi}{12}t$

$$h(t) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{12}t\right) \text{ dal che ricaviamo } B = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Ora applichiamo il *riferimento fissato* al minimo di bassa marea, dal che consegue che tutta l'escursione è positiva: per ottenere ciò, facciamo una traslazione verso l'alto con +3

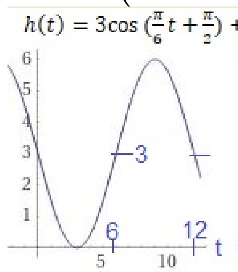
$$h(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 3$$

Però la $h(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 3$ fornisce $h(12) = 6$ anziché $h(12) = 3$; allora basta fare una traslazione orizzontale di ±3 ore come qui a dx



per avere $h(12) = 3$, basta traslare di ±3 ore

$$h(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}(t \pm 3)\right) + 3$$



dal che $C = \pm\frac{\pi}{2}$ h(18)=h(24)=3

La differenza tra + e - significherebbe che in un caso i 3m si raggiungono mentre si va verso alta marea, nell'altro caso mentre si va verso bassa marea.

↑2021.11.19 data l'equazione

$1 - \sin 3x = \frac{3}{2}$dica quante sono le soluzioni nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Si perviene facilmente alle due serie di soluzioni

soluz1: $3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, cioè $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi$

soluz2: $3x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$, cioè $x = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}k\pi$

Sarebbero 7 le soluzioni nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

k	x soluz 1 gradi	sta tra -180 e 360°? ↓	1-sin3x	x soluz 2 gradi	sta tra -180 e 360°? ↓	1-sin3x
0	-10	sì	1,5	70	sì	1,5
1	110	sì	1,5	190	sì	1,5
2	230	sì	1,5	310	sì	1,5
3	350	sì	1,5	430	no	1,5
4	470	no	1,5	550	no	1,5
	e prosegue NO			e prosegue NO		

↑2019.08.07 Considera l'espressione cos(sin x) con x numero reale e scegli la risposta esatta tra le seguenti: A: è identicamente uguale ad x; B: equivale a sin(cos x); **C: è sempre positiva**; D: e un modo abbreviato per scrivere (cos x) (sin x). D: ha senso solo per −1 ≤ x ≤ 1>. Tieni presente che gli argomenti delle funzioni trigonometriche si intendono espressi in radianti (non in gradi) di default (se non diversamente specificato); sinx varia tra -1 e 1, quindi l'argomento di cosx varia tra -1 radiante e 1 radiante, quindi cos di angoli del primo e quarto quadrante, quindi cos positivo.

↑2019.07.25 y = arccos (e $^{2\sin x - 1}$) con 0≤x≤2π <soluzione.pdf>

↑2011.01.24 Parte di un compito in classe (3ª lic.scient.tecnolog.)

Esercizio #4

a) Dimostrare le relazioni fondamentali tra le funzioni goniometriche seno, coseno e tangente.

Per le formule vedi il *manuale del prof R.Santoro* a pagina 7 e 8: esse sono ricavabili dalla fondamentale cos²α + sin²α = 1;

in particolare ricorda sin e cos in funzione della tangente (che ci serviranno nell'esercizio 4b):

- tan²α + 1 = 1 / cos²α da cui cos²α = 1 / (1 + tan²α)
- sin²α = tan² / (1 + tan²α)

b) Utilizzando le relazioni che esprimono le funzioni goniometriche di un angolo in dipendenza di una sola di esse, calcolare i valori delle funzioni seno e coseno per l'angolo α= 72°, sapendo che tan72° = √(5+2√5)

- partendo dall'ultima relazione di cui sopra [sin²α = tan² / (1 + tan²α)] avremo che
sin²72° = tan²72° / (1 + tan²72°)
sin²72° = 5+2√5 / (1 + 5+2√5) = (5+2√5) * (6 - 2√5) / (36 – 20) = eccetera
- partendo da [cos²α = 1 / (1 + tan²α)] avremo analogo procedimento per cos²72°

c) Utilizzare le formule goniometriche studiate per verificare le seguenti identità:

I. sin²(α+120°) - sin²(α-120°) + √3 sinα cosα = 0

vediamo la differenza di 2 quadrati, quindi facciamo bin_somma * bin_differenza

[sin(α+120°) + sin(α-120°)] * [sin(α+120°) - sin(α-120°)] + √3 sinα cosα = 0

Applichiamo le formule di addizione sin(α+β) = sinα cosβ + sinβ cosα e di sottrazione sin(α-β) = sinα cosβ - sinβ cosα

[sinα cos120° + sin120° cosα + sinα cos120° - sin120° cosα] * [sinα cos120° + sin120° cosα – (sinα cos120° - sin120° cosα)] + √3 sinα cosα = 0

[2sinα cos120°] * [2sin120° cosα] + √3 sinα cosα = 0

[2sinα cos120°] * [2sin120° cosα] + √3 sinα cosα = 0

4sinα cosα sin120°cos120° + √3 sinα cosα = 0

4 sinα cosα sin30° (-cos30°) + √3 sinα cosα = 0

4 sinα cosα 1/2 (-√3/2) + √3 sinα cosα = 0

-√3sinα cosα + √3 sinα cosα = 0

II. (1 - cos2α) / sin2α = sinα sec(2π - α)

Usiamo la formula di duplicazione del seno: sin2α = 2sinα cosα e

e quella di duplicazione del coseno: cos2α = cos²α – sin²α

oppure = 2cos²α – 1 oppure = 1 – 2sin²α

$[1- (1 - 2\sin^2\alpha)] / 2\sin\alpha \cos\alpha = \sin\alpha / \cos(2\pi - \alpha)$
$2\sin^2\alpha / 2\sin\alpha \cos\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$
e semplificando
$\sin\alpha = \sin\alpha$

↑2010.06.01 calcola il valore della espressione $\sin \propto \cos \propto + \frac{\tan \propto}{1+tan^2\propto}$el caso che $\propto$ sia un angolo che abbia $\cos \propto = -\frac{4}{5}$ e che $\pi < \propto < \frac{3\pi}{2}$ ($\propto$ sia nel terzo quadrante)

Da $\sin$ ^2 $\propto$ +$\cos$ ^2 $\propto$= 1iamo $sin \propto = \pm\sqrt{1 - cos^2 \propto} = \pm\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$me $\propto$ deve essere nel terzo quadrante, avremo $\sin \propto$ negativo quindi scegliamo $\sin \propto = -\frac{3}{5}$

Da $\tan \propto = \frac{\sin \propto}{\cos \propto}$ otterremo $\tan \propto = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

Sostituendo tali valori nella espressione iniziale otterremo il valore risultante $\frac{24}{25}$