TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE, isometriche e non isometriche

Isometria: è una trasformazione geometrica che conserva la lunghezza dei segmenti, ossia, dati due punti A, B l'isometria fa ad essi corrispondere due punti A' e B' tali che:
AB = A'B'
Le isometrie conservano l'allineamento tra i punti, l'ampiezza degli angoli, il parallelismo e la perpendicolarità delle rette tra loro; una figura F' trasformata con isometria rispetto ad una figura F, è congruente alla F.
Tra le isometrie abbiamo le TRASLAZIONI, le SIMMETRIE ASSIALI e CENTRALI, le ROTAZIONI.
Le dilatazioni o contrazioni non sono isometrie.
Qui un FORMULARIO delle equazioni di trasformazione geometrica; qui di seguito alcune
TRASLAZIONE**:** è una trasformazione (isometrica) geometrica della funzione y=f(x) che possiamo descrivere con le equazioni di trasformazione [detta anche traslazione di vettore v(**a;b**)]
x' = x + **a**
y' = y + **b**
che ad ogni punto (x;y) della funzione originale fanno corrispondere il punto (x';y') della corrispondente y'=f'(x) traslata rispetto alla f(x)
Una traslazione di vettore $\vec{v}(a,b)$ trasforma la funzione $y=f(x)$ nella funzione $y=f(x-a)+b$ ovvero, la sostituzione da fare nell'equazione della curva per ottenere l'equazione della curva corrispondente nella traslazione è

$$x \to x-a$$
$$y \to y-b$$

SIMMETRIA ASSIALE **di asse r:** è una trasformazione (isometrica) che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che la retta r sia asse del segmento PP'. Qui non ti descrivo le equazioni di trasformazione per un asse qualsiasi (semmai vedile *qui al §6*) ma solo i casi in cui l'asse r sia parallelo all'asse x o all'asse y: in tal caso possiamo descrivere la simmetria assiale con le equazioni di trasformazione
- simmetria rispetto alla retta y=b, parallela all'asse delle x
  x' = x
  y' = 2b – y
- simmetria rispetto alla retta x=a, parallela all'asse y
  x' = 2a - x
  y' = y
- simmetria rispetto alla retta y=mx+q (tratto da *qui al §6*); usata meno delle due precedenti

$$x' = \frac{x(1-m^2)+2my-2mq}{1+m^2}$$
$$y' = \frac{y(m^2-1)+2mx+2q}{1+m^2}$$

SIMMETRIA CENTRALE **di centro C(a;b)**: è una trasformazione (isometrica) che ad ogni punto P del piano associa un punto P' tale che C è il punto medio del segmento PP'. Considerando le proprietà del punto medio, che possiamo descrivere la simmetria centrale con le equazioni di trasformazione
  x' = 2**a** - x
  y' = 2**b** - y
Per inciso notiamo che una simmetria centrale è composizione di due simmetrie assiali, una con asse orizzontale y=b, e una con asse verticale x=a
DILATAZIONE o contrazione: è una trasformazione (**non** isometrica) geometrica della funzione y=f(x) che possiamo descrivere con le equazioni di trasformazione
- dilatazione se |**m|**, **|n|** sono >1; contrazione se **|m|**, **|n|** sono <1
  x' = **m**·x
  y' = **n**·y
che ad ogni punto (x;y) della funzione originale fanno corrispondere il punto (x';y') della corrispondente y'=f'(x) dilatata o contratta rispetto alla f(x)

Vedi eventualmente *qui* per una trattazione più approfondita delle trasformazioni geometriche, con anche i concetti di "elemento unito di una trasformazione", composizione di trasformazioni, "glissosimmetrie o antitraslazioni", equazioni delle trasformazioni con funzioni trigonometriche.
Vedi vari links sulle *trasformazioni geometriche*: *matematicando*, ..., ...

↑2022.03.12 Traccia il grafico della funzione $y = 3sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$, specificando il periodo e l'immagine.
Ritieni che basti tracciare il grafico di $y = 3\sin(2x)$e di shiftarlo a destra di $\frac{\pi}{2}$? Sarebbe sbagliato, perché questo varrebbe se il coefficiente della x fosse 1, situazione che realizziamo raccogliendo così:

$$y = 3\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Funzione sinx, shift a destra di $\frac{\pi}{4}$, dimezzi il periodo (= raddoppi la frequenza) che diventa π, dilatazione di 3, quindi l'immagine sarà l'intervallo [-3,3].

↑2013.11.27 due esercizi sulle trasformazioni geometriche
Esercizio 1 di 2

1 Una sola delle seguenti quattro trasformazioni **non** è un'isometria; individua quale. Per ciascuna delle tre isometrie specifica se si tratta di una simmetria centrale o assiale o di una traslazione e individua l'asse o il centro di simmetria o il vettore che definisce la traslazione.

a. $\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$ c. $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = 1 - 2x \\ y' = 4 - y \end{cases}$ d. $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \end{cases}$

Teniamo presente che, tra le trasformazioni geometriche isometriche, abbiamo le traslazioni, le simmetrie centrali, le simmetrie assiali: confrontando a,b,c,d con le equazioni delle trasformazioni, osserviamo che
- a: è simmetria centrale C(½;2), dunque è isometria;
- b: ha una dilatazione (m=-2) in x: **non** è isometria;
- c: è traslazione di vettore [v(-1;-4)], dunque è un'isometria;
- d: è una simmetria rispetto all'asse x=1: è isometria

Esercizio 2 di 2

4 Due punti P e P', con $y_P > y_{P'}$, hanno entrambi ascissa 2 e sono simmetrici rispetto alla retta di equazione $y = 3$. Determina le coordinate di P e P', sapendo che $\overline{PP'} = 5$.

Si può risolvere anche graficamente: segnando P sopra la y=3 e P'sotto simmetricamente: sapendo che y=3 è asse del segmento PP', avremo che

y_p = 3+2,5=5,5=7/2
$y_{p'}$ = 3-2,5=0,5=1/2

↑2013.11.15 **dilatazioni e contrazioni** con imposta equivalenza.
È dato il triangolo ABC, di vertici A(-1,0), B(1,1), C(1,3). Considera una dilatazione avente centro nell'origine che trasformi ABC in un triangolo A'B'C' equivalente, con A'(3,0) e C' nel secondo quadrante. Determina l'equazione di tale dilatazione e le coordinate di B' e C'.

Teniamo presente che una dilatazione o contrazione è una trasformazione geometrica della funzione y=f(x) che possiamo descrivere con le equazioni di trasformazione

x' = m·x
y' = n·y

dove |m| ed |n| danno origine ad una dilatazione se sono >1, oppure ad una contrazione se sono compresi tra 0 e 1, oppure può esserci una dilatazione su un asse e una contrazione sull'altro.
Un eventuale segno meno per m ed n significherebbe anche simmetria assiale.

A(-1, 0) va in A'(3, 0); C(1, 3) va in C'(x', y') con x'<0 e y'>0 per essere C' nel 2° quadrante.
L'equazione di trasformazione x' = m x, applicata su A→A', dà 3 = m (-1), da cui ricavo **m = -3.**
L'equazione di trasformazione x' = m x, applicata su C→C' con m=-3, dà C'(-3, y'): dunque x' per C è minore di zero, come ci aspettavamo dalla suddetta condizione di quadrante: se non fosse stato così, avremmo dovuto fermarci qui e dire che la trasformazione richiesta era impossibile.
Siccome la trasformazione richiesta da questo esercizio vuole dare origine a un triangolo equivalente, occorre che la dilatazione sull'asse delle x (operata da m) sia compensata da una **contrazione inversa** sull'asse delle y e dunque occorre che **n sia = -1/m** (inverso dell'opposto) dunque n=1/3.

L'equazione di trasformazione y' = n y, applicata su C(1, 3) →C' con n=1/3, dà C'(-3, 1): dunque y' per C è maggiore di zero, come ci aspettavamo dalla suddetta condizione di quadrante: se non fosse stato così, avremmo dovuto fermarci qui e dire che la trasformazione richiesta era impossibile.

Dunque possiamo accettare come validi i valori di m ed n trovati e l'equazione della trasformazione è

$$x' = -3x$$
$$y' = 1/3\, y$$

Applicando m ed n alle coordinate di B(1, 1) otteniamo quelle di B'(-3, 1/3). C' già trovammo.

Sintesi dei risultati:

$$\left[\begin{cases} x' = -3x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases} ;\ A'(3, 0),\ B'\left(-3, \frac{1}{3}\right),\ C'(-3, 1)\right]$$

↑2013.11.06 **traslazione di curve.**

1) Determina la traslazione che trasforma la curva c1 di equazione x^2-y=0 nella curva c2 di equazione x^2-2x-y-3=0.

Una traslazione di vettore (a,b) trasforma la curva c1 in $(x-a)^2-(y-b)=0$, cioè nella curva $x^2-2ax-y+a^2+b=0$, che può essere uguale all'equazione della c2 solo se

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ a^2 + b = -3 \end{cases}$$

Sistemino semplice da risolvere per trovare i valori del vettore (a,b).

2) Determina i valori della traslazione che trasforma la curva γ nella curva γ'

$\gamma : y = x^2$	$\gamma' : y = x^2 - 2x$	$[x' = x + 1;\ y' = y - 1]$
$\gamma : xy = 1$	$\gamma' : xy - x + 2y - 3 = 0$	$[x' = x - 2;\ y' = y + 1]$
$\gamma : 2x^2 - 2x - y = 0$	$\gamma' : 2x^2 - 6x - y + 6 = 0$	$[x' = x + 1;\ y' = y + 2]$
$\gamma : x^2 + y^2 - 4 = 0$	$\gamma' : x^2 + y^2 + 6x + 5 = 0$	$[x' = x - 3;\ y' = y]$

↑2013.10.30 cerca asse di simmetria di una curva

D: Quando una curva y=f(x) ha asse di simmetria parallelo all'asse Y?

R: La retta x=k (parallela all'asse Y) sarebbe specchio verticale della funzione y=f(x), se potessimo dimostrare che per ogni x, f(k-x) = f(k+x).

D: Quando una curva x=f(y) ha asse di simmetria parallelo all'asse X?

R: La retta y=k (parallela all'asse X) sarebbe specchio orizzontale della funzione x=f(y), se potessimo dimostrare che per ogni y, f(k-y) = f(k+y).

Esercizio: determina rispetto a quale retta parallela all'asse X è simmetrica la curva di equazione $y^2 - 5y - x = 0$

R: scriviamo l'equazione nella forma x=f(y) cioè $x = y^2 - 5y$;
la retta parallela all'asse delle X che cerchiamo avrebbe equazione y=k
dunque cerchiamo se esiste un valore di k per il quale f(k-y) = f(k+y).

$$(k-y)^2 - 5(k-y) = (k+y)^2 - 5(k+y)$$

$$\cancel{k^2} + \cancel{y^2} - 2ky \cancel{- 5k} + 5y = \cancel{k^2} + \cancel{y^2} + 2ky \cancel{- 5k} - 5y$$

$$-4ky + 10y = 0$$

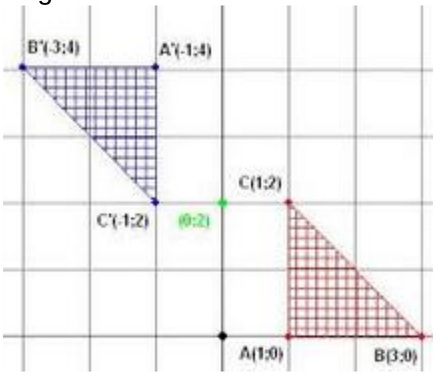
$$y(-4k + 10) = 0$$

$$k = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2}$$

quindi esiste la retta asse di simmetria cercato e la sua equazione è y=5/2

↑2013.10.25 **simmetria centrale**: una sua definizione precisa ma complessa puoi trovare [su Wikipedia](); qui può bastare una comprensione intuitiva e pratica.

I triangoli seguenti hanno vertici in simmetria centrale



perché i punti A B C sono simmetrici di A' B' C' rispetto al punto di simmetria (0;2).

D: quando due punti A e A' sono simmetrici rispetto ad un punto di simmetria P?
R: quando P fosse il punto medio del segmento AA'
D: quando due triangoli ABC e A'B'C' sono simmetrici rispetto ad un punto P?
R: quando i segmenti AA' BB' CC' hanno tutti lo stesso punto medio P.
D: supponiamo che il triangolo ABC abbia vertici rispettivamente di coordinate (-2;6) (0;1) (2;-1) e che il triangolo A'B'C' abbia vertici rispettivamente di coordinate (1;-4) (-1;1) (-3;3)
D: si corrispondono in una simmetria centrale?
R: vedo se il punto medio M di AA' coincide col punto medio di BB'

$$M_{AA'} \equiv \left(\frac{-2+1}{2} ; \frac{6-4}{2} \right) \equiv \left(-\frac{1}{2} ; 1 \right)$$

$$M_{BB'} \equiv \left(\frac{0-1}{2} ; \frac{1+1}{2} \right) \equiv \left(-\frac{1}{2} ; 1 \right)$$

se non coincidessero la risposta sarebbe NO;
invece coincidono e allora vedo se M è anche il punto medio di CC'

$$M_{CC'} \equiv \left(\frac{2-3}{2} ; \frac{-1+3}{2} \right) \equiv \left(-\frac{1}{2} ; 1 \right)$$

dunque la risposta è sì: i triangoli dati si corrispondono in una simmetria centrale e il loro punto di simmetria è (-½;1).

Se invece di due triangoli ti fossero stati dati i vertici di due quadrilateri o di due pentagoni, avresti semplicemente dovuto procedere con la verifica in modo analogo per ogni altra coppia di punti corrispondenti nella presunta simmetria centrale.