Aiuto allo studio in GEOMETRIA: DIMOSTRAZIONI

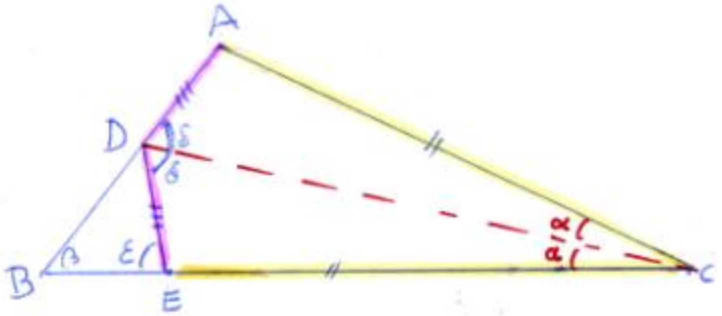
Scusa la banalità di questa bozza di appunti.
Per le dimostrazioni di congruenza sui triangoli rimanderei alla seguente serie di esempi <*labella#1* *#2* *#3* *#4* *#5* *#6* ***#7*** *#8* ***#9*** *#10* ***#11*** *#12* ***#13*** *#14* *#15* ***#16*** ***#17*** *#18* ***#19***> e anche per la monotonia delle disuguaglianze <*#20* *#21* ...>
E sui parallelogrammi <*labella****#01*** *#02* *#03* ***#04*** *#05* ***#06*** *#07* ***#08*** *#09* ***#10*** *#11* *#12* *#13* *#14* *#15* ***#16*** *rombo****#17*** ***#18*** *#19* *#20* *#21* *rombo****#22***, ...>

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 06/05/2024; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: geometria analitica apprendimento, e-learning, copertina di Nuova matematica a colori

↑2024.05.06 Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Sia O il centro del quadrato BCDE costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A. Dimostrare che il punto O è equidistante dalle rette AB e AC. Qui la soluzione.

↑2024.04.25 Sia ABC un triangolo in cui BC > AC. Considera il punto E sul lato BC tale che EC ≅ AC e indica con D il punto in cui la bisettrice dell'angolo ACB interseca AB

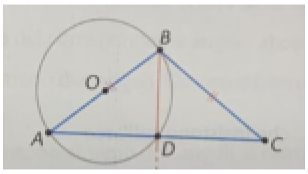


a) Dimostra che ADC e DEC sono congruenti
b) dimostra che l'angolo BED è maggiore dell'angolo DBE (ε>β)
c) dimostra che BD > DA.
Soluzione:
a) i due triangoli sono congruenti per il criterio "*due lati congruenti e l'angolo compreso*"
b) si dimostra più facilmente, dimostrando prima c) e poi b)
c) per il teorema della bisettrice BD:DA=BC:AC; siccome BC>AC, consegue che BD > DA
b) da BD > DA appena dimostrato, consegue che l'angolo BED è maggiore dell'angolo DBE ($\varepsilon > \beta$) perché ε è angolo opposto a lato BD che è maggiore del lato DE=DA cui si oppone l'angolo β
Ma come potremmo procedere se dovessimo dimostrare b) prima di c) ?
b) ε è angolo esterno del triangolo ECD quindi $\varepsilon = \alpha + \delta$; il doppio di δ è l'angolo EDA che è esterno del triangolo DBE, quindi $\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon + \beta)$; sostituiamo con tale uguaglianza il δ della precedente e otteniamo $\varepsilon = \alpha + \frac{1}{2}(\varepsilon + \beta)$, dal che $2\varepsilon = 2\alpha + \varepsilon + \beta$, dal che $\varepsilon = 2\alpha + \beta$, quindi $\varepsilon > \beta$
c) BD > DA perché BD è segmento opposto all'angolo ε che è maggiore di β che è opposto a DE=DA.

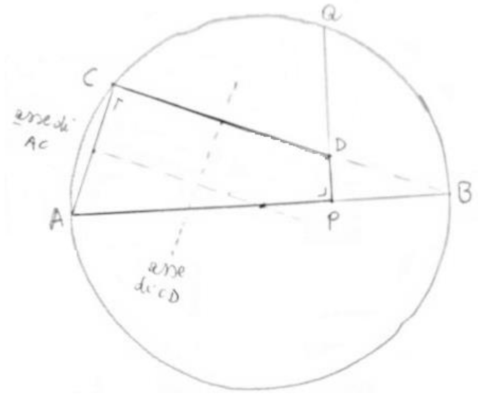
↑2021.02.07 Da un punto P esterno alla circonferenza di centro O e distante da O il doppio del raggio traccia la tangente alla circonferenza indicando con C il punto di tangenza. La retta PO taglia la circonferenza in due punti: indica con A quello più distante da P. Dimostra che il triangolo PAC è isoscele.
Soluzione: basta dimostrare che gli angoli CPO e OAC sono congruenti. Il triangolo PCO è rettangolo in C per la tangenza indicata in ipotesi; costruisci il triangolo POQ essendo Q il punto simmetrico di O rispetto alla retta PC: noterai che POQ è equilatero perché PO è il doppio del raggio; l'angolo POC è dunque di 60°; POC è congruente alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti del triangolo OAC, che però è isoscele (OA e OC sono raggi) e dunque l'angolo OAC è di 30°; nel triangolo rettangolo PCO l'angolo CPO è complementare di un angolo di 60, quindi è di 30°; quindi gli angoli CPO e OAC sono congruenti; quindi PAC è isoscele.

↑2020.10.27 due dimostrazioni facili

Siano AB e CD due corde parallele di una circonferenza (con estremi che si susseguono sulla circonferenza con sequenza ordinata A, B, C, D). Sia E il punto d'intersezione di AC e BD. Dimostrare che i triangoli AEB e CED sono isosceli.	[CzzC: ricorda gli angoli alterni interni tagliati da una trasversale; ricorda la congruenza di angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco]

	Sia AB un diametro di una circonferenza e C un punto, esterno ad essa e non allineato con A e B, tale che AB≅BC. Sia D il punto in cui il segmento AC interseca la circonferenza. Dimostra che la semiretta BD è la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}C$. [CzzC: l'angolo $A\hat{D}B$ insiste su una semicirconferenza, quindi è retto, quindi BD è altezza di un triangolo isoscele, quindi lo divide in due triangoli rettangoli congruenti, quindi ...]

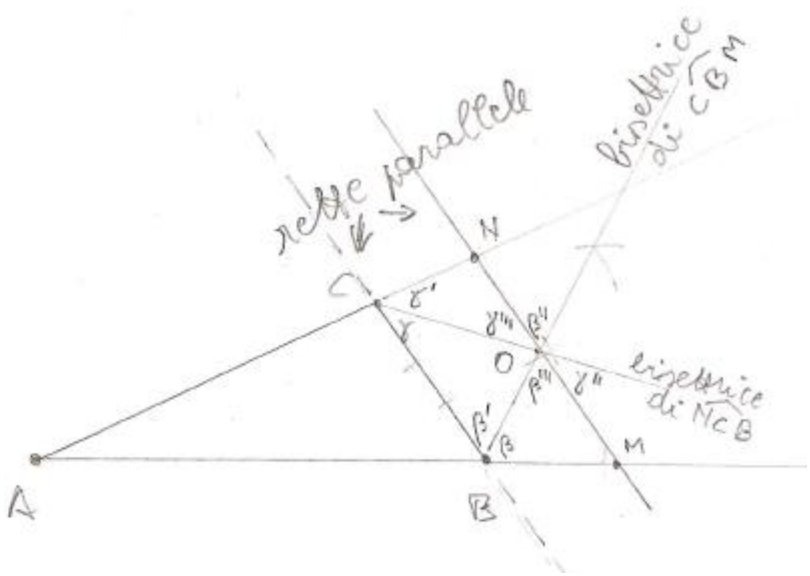
↑2019.07.23 Sul diametro AB di una semicirconferenza, considera un punto P e traccia per esso la retta perpendicolare ad AB, indicando con Q il suo punto d'intersezione con la semicirconferenza. Considera poi un punto C sull'arco AQ e indica con D il punto in cui la corda BC incontra il segmento PQ.
1) Dimostra che il quadrilatero APDC è inscrivibile in una circonferenza.
2) Qual è il centro della circonferenza circoscritta?



1) Premessa: un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se i suoi angoli interni opposti sono supplementari (come vedresti dimostrabile ad esempio qui):
- osserviamo che gli angoli opposti APD e ACD sono retti, dunque supplementari: APD è retto per definizione, ACD è retto perché è angolo alla circonferenza che insiste su una semicirconferenza;
- dato che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è 360°, tolti i 180° dei suddetti due opposti, restano 180° per gli altri due opposti (CDP e PAC): dunque sono anch'essi supplementari;
- avendo dimostrato che gli angoli opposti del quadrilatero APDC sono supplementari, abbiamo dimostrato che quel quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza.

2) Il centro della circonferenza nella quale il quadrilatero è inscritto coincide, come per tutti i poligoni inscritti, con l'intersezione degli assi dei lati: basta trovare il punto di incontro di due assi, perché gli altri due passano necessariamente per lo stesso punto di incontro.

↑2018.08.19 Dato un triangolo ABC prolunga AB e AC oltre il lato BC e traccia le bisettrici degli angoli esterni così ottenuti. Dal punto d'incontro O di tali bisettrici, traccia la parallela al lato BC che incontra la retta AB in M e la retta AC in N.
1) Dimostra che MN = MB + NC
2) come si definisce l'angolo esterno di un angolo di un triangolo?
3) che tipo di quadrilatero è MNCB?



1) Dimostra che MN = MB + NC

β = β’ perché la retta OB è bisettrice dell’angolo CBM
γ = γ’ perché la retta OC è bisettrice dell’angolo NCB
β’ = β’’ perché angoli corrispondenti tra rette parallele tagliate dalla trasversale OB
β’’ = β’’’ perché angoli opposti al vertice tra le rette OB e MN
quindi, per la proprietà transitiva, β = β’’’,
quindi il triangolo BOM è isoscele,
quindi MB = OM
γ’ = γ’’ perché angoli corrispondenti tra rette parallele tagliate dalla trasversale OC
γ’’ = γ’’’ perché angoli opposti al vertice tra le rette OC e MN
quindi, per la proprietà transitiva, γ = γ’’’,
quindi il triangolo CON è isoscele,
quindi NC = ON
Siccome per costruzione MN = OM + ON,
se OM = MB e ON = NC,
allora è vero anche che MN = MB + NC

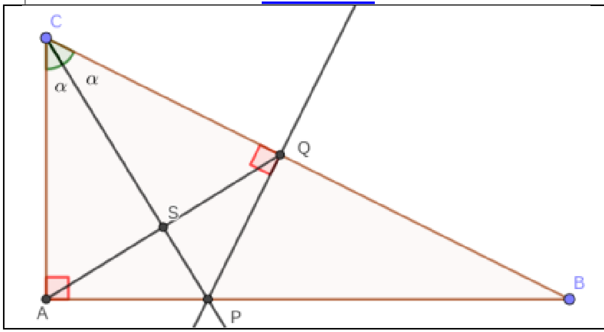
2) come si definisce l’angolo esterno di un angolo α di un triangolo?

Detto α’ l’angolo esterno di α, esso si definisce come l’angolo esterno di un angolo α di qualunque poligono
l’angolo α’ esterno di α ha lo stesso vertice di α
ha uno dei due lati coincidente con un lato di α
ha per altro lato il prolungamento l’altro lato di α consecutivo al precedente
Per il secondo teorema dell’angolo esterno di un triangolo, α’ è congruente con la somma degli altri due angoli ad esso non adiacenti.

3) che tipo di quadrilatero è MNCB?

Trapezio

↑2017.03.01 sulla <labella#9> farei un'annotazione



In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, traccia la bisettrice CP e indica con Q la proiezione di P su BC. Dimostra che

AC ≅ QC

AQ è perpendicolare a CP

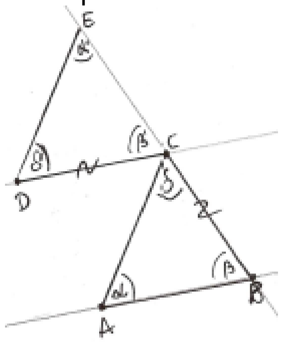
[CzzC: <qui> mi parrebbe ridondante la seconda parte della dimostrazione ... "Anche APQ è un triangolo isoscele perchè AP≡PQ e .." perché basterebbe la prima coppia di angoli retti per dimostrare la perpendicolarità.]

↑2017.02.01 Facile: il quadrilatero ABCD ha AB ≅ AD, CB ≅ CD, Â ≅ Ĉ; dimostra che è un rombo.
Dimostrazione: abbiamo due triangoli isosceli disposti simmetricamente rispetto alla base in comune. Gli angoli alla base del triangolo ABD sono congruenti perché isoscele; anche gli angoli alla base del

triangolo BCD sono congruenti perché isoscele, ma i 4 angoli alla base sono congruenti fra loro perché (180° - Â) = (180° - Ĉ) dato che Â ≅ Ĉ; allora i due triangoli isosceli sono congruenti per il secondo criterio; ma allora tutti 4 i lati del quadrilatero sono congruenti, quindi è un rombo.

↑2017.01.15 Facile: dato il triangolo ABC, isoscele sulla base AB, considera il punto P su AB. Traccia la parallela a BC passante per P e indica con Q il punto in cui incontra il lato AC; traccia la parallela ad AC passante per P e indica con R il punto in cui incontra il lato BC. Dimostra che PQ + PR ≅ AC.
Dimostrazione: per la congruenza degli angoli formati da rette parallele tagliate da una trasversale è facile dimostrare che il triangolo AQP è isoscele, dal che ...

↑2017.01.gg Dato un triangolo ABC, traccia la retta parallela ad AB passante per C, e, delle sue due semirette aventi origine in C, considera la *semiretta* giacente nel semipiano, generato dalla retta BC, occupato dal triangolo (la retta BC individua due semipiani; il triangolo sta solo in uno dei due); su questa *semiretta* considera il punto D tale che CD ≅ BC. Sul prolungamento di BC, dalla parte di C, considera il punto E tale che CÊD ≅ BÂC. Dimostra che AC ≅ DE



α ≅ α' per costruzione
β ≅ β' perché corrispondenti tra rette parallele
siccome   α + β + δ = 180°
ma anche α' + β' + δ' = 180°
ne discende che anche δ ≅ δ
I due triangoli ABC e CDE sono dunque congruenti per il 2° criterio di congruenza (un lato e due angoli ad esso adiacenti).
Ne consegue che AC ≅ DE perché sono lati opposti ad angoli congruenti (β e β') in due triangoli congruenti.

↑2016.01.gg nella figura le due circonferenze c_1 e c_2 di centri O_1 e O_2 sono tangenti esternamente tra loro e tangenti internamente alla circonferenza c_3 di centro O_3.
Sapendo che $O_1O_3 = 5$ cm e che $O_2O_3 = 7$ cm, determina i raggi r_1, r_2, r_3 delle tre circonferenze.
Per quanto sia intuitiva la soluzione, occorre rigorosità di dimostrazione.
Modalità di soluzione 1

Due circonferenze c_1 e c_2 sono tangenti esternamente se e solo se la distanza dei loro centri è uguale alla somma dei loro raggi:

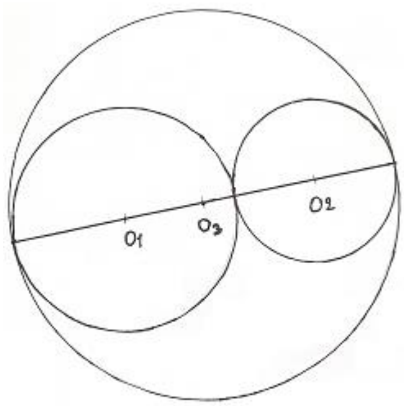
$O_1O_2 = r_1 + r_2$

$O_1O_2 = O_1O_3+O_3O_2 = 5 + 7 = 12$ cm

Se tali circonferenze sono anche tangenti internamente alla c_3, ciò implica che il diametro di c_3 è uguale alla somma dei diametri di c_1 e c_2, dunque

$2r_3 = 2r_1 + 2\,r_2$ e, semplificando per 2 otteniamo

$r_3 = r_1 + r_2$, dunque $r_3 = 12$ cm.



Da $O_1O_3 = 5$ cm deriva che $r_1 = r_3 - 5 = 12 - 5 = 7$ cm
Da $O_2O_3 = 7$ cm deriva che $r_2 = r_3 - 7 = 12 - 7 = 5$ cm
Altra modalità di soluzione: un sistema di tre equazioni in tre incognite
$r_3 = r_1 + r_2$
$r_1 = r_3 - 5$
$r_2 = r_3 - 7$
sostituendo nella prima equazione r_1 ed r_2 con i valori della seconda e terza equazione otteniamo
$r_3 = r_3 - 5 + r_3 - 7$
$- r_3 = - 12$ dal che $r_3 = 12$ e poi ...

↑2009.mm.gg <atuttascuola> dimostra che in un **triangolo**
- un angolo esterno è sempre maggiore di ogni angolo interno non adiacente ed è pari alla somma degli angoli interni ad esso non adiacenti;
- a lato maggiore sta opposto angolo maggiore e viceversa;

- ogni lato è minore della somma degli altri due;
- il segmento che congiunge i punti medi di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e congruente alla sua metà;
- Il punto d'intersezione di due mediane le divide in due parti tali che quella uscente dal vertice è il doppio dell'altra

Dimostra che in un **parallelogrammo** le diagonali si tagliano scambievolmente a metà (= si bisecano).
Dimostra che in un **rombo** le diagonali sono tra loro perpendicolari e sono bisettrici degli angoli.