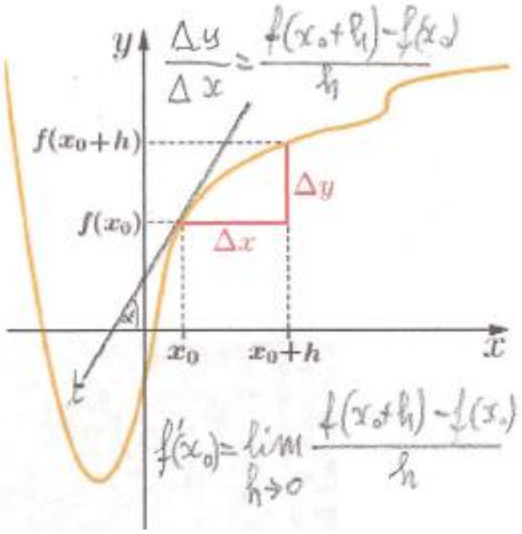
Calcolo della DERIVATA come limite del RAPPORTO INCREMENTALE

<wikipedia> la derivata di una funzione f(x) descrive la crescita o decrescita della stessa al variare della x. Il suo valore puntuale in un generico x_0, se esiste, è la pendenza della tangente al grafico della funzione in quel punto e ne rappresenta la migliore approssimazione lineare. Nel caso in cui la derivata esista (cioè la funzione sia derivabile) in ogni punto del dominio, la si può vedere a sua volta come una funzione che associa a ogni punto proprio la derivata in quel punto.

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 17/02/2022; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: Aiuto allo studio in matematica per medie e superiori

(fig.1)



la derivata di f(x) in x_0 è il limite del rapporto incrementale Δy/Δx in x_0

Tale limite equivale alla pendenza **m** della y=**m**x+q retta tangente alla f(x) in x_0, cioè tgα

↑2022.02.17 data la $f(x) = 3x^2$ calcola il valore della sua derivata nel punto $x_0 = -1$ col metodo del rapporto incrementale.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{3(-1+h)^2 - 3(-1)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(1+h^2-2h)-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3+3h^2-6h-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h(h-2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} 3(h-2) = -6$$

È ovvio che, conoscendo a priori che la derivata di $f(x) = 3x^2$ è $f'(x) = 6x$, si farebbe prima a calcolare $f'(-1) = 6 \cdot (-1) = -6$, ma il metodo del rapporto incrementale aiuta a fissare il significato di derivata e permetterebbe anche di **dimostrare** che la derivata di $3x^2$ è $f'(x) = 6x$, e di dimostrare anche le derivate di altre $f(x)$. Ad esempio, dimostriamo che la derivata di $f(x) = x^3$ è $f'(x) = 3x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+h^3+3x^2h+3xh^2-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h^2+3x^2+3xh)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}(h^2+3x^2+3xh) = 3x^2$$

analogamente potremmo dimostrare che

se $y = kx^2 \rightarrow y' = 2kx$

se $y = kx^3 \rightarrow y' = 3kx^2$

se $y = kx^n \rightarrow y' = nkx^{n-1}$

↑2019.02.18 Conoscendo la regola di derivazione di un rapporto (se $f(x) = \frac{N}{D}$ allora $f'(x) = \frac{N'\cdot D - N\cdot D'}{D^2}$) facciamo presto a derivare $y = \frac{x+1}{x}$, così $y' = \frac{x-(x+1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$

Ma proviamo a dimostrarlo con il limite del rapporto incrementale

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h+1}{x+h} - \frac{x+1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2+hx+x-x^2-x-hx-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2}$$

↑2019.02.05 Proviamo a ricavare la derivata di alcune funzioni con il limite del rapporto incrementale, per fare esercizio di ripasso sul calcolo dei limiti, ancorché si sappia già in partenza il risultato

$y = \sqrt{x}$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$y = e^x$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h}$$

ma il $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ come limite notevole

quindi

$$\lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

$y = \ln x$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h}$$

al denominatore moltiplico e divido per x in modo da far apparire un limite notevole

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{x \cdot \frac{h}{x}}$$

→ limite notevole che $= 1$

$$= \frac{1}{x}$$

$$y = \ln kx$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln k(x+h) - \ln kx}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln k + \ln(x+h) - \ln k - \ln x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

e da qui si prosegue come nell'esercizio precedente, ottenendo ancora y'=1/x
nota come il fattore k nell'argomento del logaritmo
sia ininfluente sul calcolo della derivatala

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{a}{\sqrt[3]{x+h}} - \overset{b}{\sqrt[3]{x}}}{h}$$

ricordando che
$$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

moltiplichiamo Num. e Denom per
in modo da avere al Num. la differenza
di due cubi per far sparire le radici cubiche

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x \cdot (x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}{h\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x+h}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{h(\cdots\cdot)} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h \cdot (\cdots\cdot)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\cdots)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{x(x+h)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$