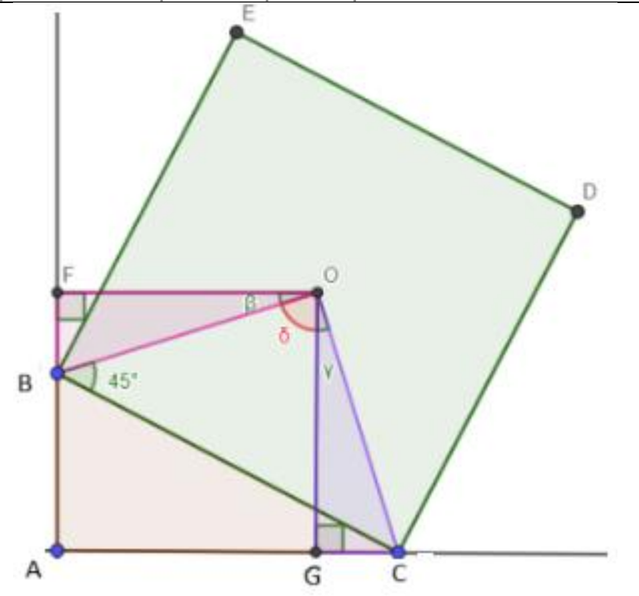
Esercizi attinenti ad esami di stato - MATURITÀ LICEI

Vedi anche
- temi ministeriali di mate per i licei 1992-1994 (con risoluzione);
- <*matefilia*> maturità scientifica 2019: criteri di valutazione.
- <*poliorientami*> POLITEST: come prepararsi all'ammissione al Politecnico di Milano: estratto-ripasso di test di mate

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 12/05/2024; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: aiuto allo studio in matematica, dimostrazioni di geometria

↑2024.05.06 <*pdf*> esame di maturità 2023 per i Licei: il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 di 6 quesiti.
[CzzC: troveresti le soluzioni in questo.*pdf*, ma qui appresso spiego con parole mie, anche se più povere, la risposta al primo quesito.



Sia ABC un triangolo rettangolo in A.
Sia O il centro del quadrato BCDE costruito sull'ipotenusa, dalla parte opposta al vertice A.
Dimostrare che il punto O è equidistante dalle rette AB e AC.

Soluzione1:
La distanza di O dalla retta AB è la lunghezza del segmento OF, e la distanza di O dalla retta AC è il segmento OG.
I triangoli BFO e OCG ci appaiono congruenti, ma dimostriamolo:
- sono entrambi rettangoli,
- le loro ipotenuse OB e OC sono congruenti perché semi-diagonali del quadrato BCDE,
- l'angolo BOC è retto, perché le diagonali si incontrano perpendicolarmente, quindi γ è complementare di δ
- l'angolo FOG è retto (perché le sue semirette sono perpendicolari ai cateti del triangolo ABC per la definizione di distanza punto-retta) e quindi l'angolo β è complementare di δ;
- dunque gli angoli β e γ sono complementari dello stesso angolo δ, dunque sono congruenti;
- per il secondo *criterio di congruenza dei triangoli* (2 angoli e un lato congruenti), abbiamo dimostrato che i due triangoli BFO e OCG sono congruenti;
- dunque anche OF e OG sono congruenti.

È così dimostrata l'equidistanza di O dalle rette AB e AC.
La soluzione proposta in questo.*pdf* prosegue così:

Usando la geometria analitica, abbiamo: A ≡ (0; 0), B ≡(0; b), C ≡ (0; c)

ma riterrei erroneo il (0; c): suggerirei A ≡ (0; 0), B ≡(0; b), C ≡ (c; 0)
Con il suddetto riferimento alla geometria analitica probabilmente si intende dire che si può fare una dimostrazione analitica oltre alla dimostrazione geometrica; proviamo dunque altri tipi di dimostrazione.

Soluzione2.
L'obiettivo è sempre quello di dimostrare che $OF \cong OG$; essi sono i cateti di due triangoli rettangoli, le ipotenuse dei quali sono le semidiagonali OB e OC del quadrato, ovviamente congruenti. In un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto

$$OF = OB \cdot \sin(180 - ABO) = OB \cdot \sin(ABO)$$
$$OG = OC \cdot \sin(GCO)$$

Siccome $OB \cong OC$ e $\sin(ABO) = \sin(GCO)$, abbiamo dimostrato che $OF \cong OG$

Se ti chiedi perché $\sin(ABO) = \sin(GCO)$, ecco la spiegazione: gli angoli ABO e GCO sono angoli interni del quadrilatero $ACOB$; gli angoli interni di un quadrilatero sommano 360°, l'angolo BAC è di 90°, l'angolo BOC è di 90° perché le diagonali del quadrato sono tra loro perpendicolari, quindi gli angoli ABO e GCO sommati assieme devono fare 180°, quindi sono supplementari, ma i seni di due angoli supplementari sono uguali.

Soluzione3.
Considerando in geometria analitica A ≡ (0; 0), B ≡(0; b), C ≡ (c; 0), scriviamo l'equazione delle due rette così costruite:

- retta r1 $y = mx + b$ passante per B ed avente pendenza $m = -\text{cotan}(ABC + 45°)$
- retta r2 passante per C ed avente pendenza perpendicolare ad r1
- mettendo a sistema le due rette, troveremo le coordinate del punto O
- se tali coordinate saranno uguali, avremo dimostrato che $OF \cong OG$

Se interessasse lo svolgimento, dimmelo e lo accoderei qui.