Aiuto allo studio in *CALCOLO COMBINATORIO*

Scusa la banalità di questi appunti rispetto al molto di meglio che troveresti online; vedi ad esempio in <*progettomatematica*> il principio fondamentale del calcolo combinatorio[1], rappresentabile con il *diagramma ad albero*; vedi <*youmath*, *matematika*> per calcolare il numero di casi (raggruppamenti) distinti che si possono presentare in un esperimento fatto con oggetti discreti dei quali sia noto
- il numero n di oggetti O_j disponibili ($1 \leq j \leq n$)
- il numero k di **posti** nei quali si possono collocare i vari O_j per formare un raggruppamento (detto anche permutazione o disposizione o combinazione a seconda delle regole per comporlo specificate appresso)
- le **regole** per procedere alla costituzione dei vari raggruppamenti:
  - si debbono utilizzare tutti gli oggetti disponibili oppure solo una parte?
  - lo stesso oggetto O_j può essere utilizzato una sola volta o più volte (= con ripetizione r_j) in uno stesso raggruppamento?
  - conta l'ordine in cui sono disposti gli oggetti nei vari raggruppamenti, oppure no? Se no, parleremo di combinazione, altrimenti di permutazione o di disposizione a seconda se n=k o se n≠k.

Per calcolare quanti raggruppamenti si possano ottenere disponendo gli n oggetti in k posti, con o senza ordine, senza o con ripetizioni, useremo diverse formule a seconda delle suddette specificazioni:
- PERMUTAZIONI (n=k, conta ordine)
- DISPOSIZIONI (n>k, conta ordine)
- COMBINAZIONI (n>k, non conta ordine)

<*liceoMajorana*> il calcolo dei casi possibili, *rappresentazione ad albero*; **vari esercizi risolti**

Potrebbe essere utile (ma non indispensabile) acquisire i concetti base del CALCOLO DELLE PROBABILITÀ, prima di approfondire il calcolo combinatorio, mentre alcuni esercizi sul calcolo delle probabilità potrebbero potersi risolvere anche con il calcolo combinatorio.

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 09/02/2023; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: matematica x scuola secondaria, statistica

Formule per trovare quanti raggruppamenti possiamo fare con n oggetti in k posti

Vedi anche lo schema dicotomico illustrato qui per trovare la scelta giusta tra le 6 formule

	Senza ripetizione di oggetti	Con ripetizione di oggetti
PERMUTAZIONI (usare tutti gli n oggetti [2] nei k posti, conta ordine)	$P_n = n! \quad (n = k)$ [2] 120 anagrammi di MADRE	$P_k^r = \frac{k!}{r_1! r_2! \ldots r_k!}$ [2] 10 anagrammi di MAMMA
DISPOSIZIONI ($n \neq k$, conta ordine)	$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (n > k)$ [3a] 12 bandiere bicolor avendo 4 colori disponibili	$D_{n,k}^* = n^k$ [3b] Ogni elemento può ripetersi fino a k volte 25 numeri di 2 cifre dispari {1,3,5,7,9}
COMBINAZIONI (non conta ordine)	$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (n > k)$ [4] anche $\binom{n}{k}$ Coeff.bin 622.614.630 colonne del superenalotto per essere certi di fare 6 con i 90 numeri {1,2, 3 …. 89, 90}	$C_{n,k}^* = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ anche $\binom{n+k-1}{k}$ Ogni elemento può ripetersi fino a k volte 45 gelati da due palline scelte tra 9 gusti

Ovviamente ci possono essere esercizi con vincoli tali che richiedono una soluzione ibrida anziché la sola applicazione di una delle suddette formule (che qui troveresti in Excel)

↑2023.01.29 <DaUnLibroDiTesto> Se ti chiedessi quanti anagrammi anche non significativi ha la parola TAVOLE, non avresti difficoltà a individuare che si tratta di calcolare il numero di PERMUTAZIONI SENZA RIPETIZIONE, rispondendo con la formula $P_n = 5! = 120$, oppure arriveresti allo stesso risultato con il *diagramma ad albero* applicando il principio fondamentale del calcolo combinatorio[1]. Analogamente troveresti che sono 420 gli anagrammi della parola TORONTO tenendo conto che sulle 7 posizioni la T ricorre 2 volte e la O ricorre 3 volte: PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

$$P_k^r = \frac{k!}{r_1!\, r_2! \ldots r_k!} = \frac{7!}{2!\ 3!} = 420$$

Ma ben diversa sarebbe la formula da usare per calcolare (#20) quanti numeri con 6 cifre distinte si possono scrivere utilizzando le cifre da 0 a 9. Ragioniamo col *diagramma ad albero*: in prima posizione da sinistra dobbiamo escludere lo zero (perché è inusuale scrivere un numero che inizia per 0, come ad es. 012345, e comunque non avrebbe valore diverso da 12345), quindi abbiamo $10 - 1 = 9$ cifre possibili, vincolo che fa di questo caso un problema ibrido; in seconda posizione abbiamo ancora solo 9 cifre disponibili, perché una cifra è già stata impegnata in prima posizione; in terza posizione ne abbiamo 8, perché già due sono state impegnate in prima posizione e così via,

quindi $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136080$.

Potremmo ragionare anche in un altro modo: dalla seconda alla sesta posizione abbiamo a DISPOSIZIONE 9 cifre da disporre su 5 posizioni (conta ordine) senza ripetizione, quindi

$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{9!}{(9-5)!} = 15120$, valore che moltiplicato per i 9 casi della prima posizione fa 136080.

Con la stessa formula della DISPOSIZIONE SENZA RIPETIZIONE troveremmo soluzione per questi altri esercizi:

- #48: quante sono le scelte possibili in un' assemblea condominiale di 30 persone tra le quali si devono eleggere un presidente, un verbalizzatore ed un fiduciario? Risp.: $\frac{30!}{(30-3)!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24.360$
- #51 e #52: in quanti modi diversi si possono sedere 6 persone su una fila di 20 poltrone libere? Sbaglieresti ad impostare $\{n = 6, k = 20\}$ quantomeno perché $n < k$. Inverti l'approccio del problema: considera di avere un'urna con dentro i biglietti numerati per le 20 poltrone $n = 20$: quanti raggruppamenti diversi avremmo estraendo ogni volta $k = 6$ biglietti? Risp.: 27.907.200

#21 Quanti numeri di 5 cifre tutte pari e diverse da zero si possono scrivere?
Le cifre usabili sono $\{2,4,6,8\}$, non abbiamo da escludere lo zero in prima posizione sx, possiamo ripetere una cifra già usata in un'altra posizione, quindi per il *diagramma ad albero* $4^5 = 1024$, ovvero DISPOSIZIONE CON RIPETIZIONE di n=4 oggetti distinti presi k=6 alla volta $D^*_{n,k} = n^k$.
Con la stessa formula troveremmo soluzione per questi altri esercizi

- #47 in quanti modi 4 insegnanti possono coprire 2 ore di lezione in una classe, ammettendo che ci possono essere due ore dello stesso insegnante? Risp.: $2^4 = 16$

#25 Quante password di 6 caratteri possiamo costruire utilizzando le 26 lettere dell'alfabeto inglese e le 10 cifre da 0 a 9?
Qvviamente 36^6, DISPOSIZIONE $D^*_{n,k} = n^k$ come al #21.
E se dovessimo escludere le password che contengono solo lettere o solo numeri, quante ne resterebbero? $36^6 - (26^6 + 10^6)$ cioè meno le 26^6 DISPOSIZIONI con sole lettere e meno le 10^6 disposizioni con soli numeri.

#29 *Quanti sono i divisori del numero* 3240 sapendo che $3240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$?
Costruiamo una tabella di tante righe quanti sono i fattori primi diversi da 1, mettiamo in prima colonna il fattore 1 (anche 1 è un divisore primo, ancorché non esplicitato nella suddetta uguaglianza) e nelle altre colonne di ogni riga mettiamo le potenze del rispettivo fattore primo.

1	2	4	8	
1	3	9	27	81
1	5			

Sono certamente divisori i numeri ottenuti moltiplicando tra loro ciascun numero della seconda riga per ciascun numero della prima riga: sono $5 \cdot 4 = 20$ divisori.
Ora costruiamo i divisori ottenuti moltiplicando ciascuno di questi precedenti 20 divisori per ciascun numero della terza riga

sono $2 \cdot 20 = 40$ divisori, che è il risultato cercato.

Ma c'è una formula più sbrigativa (che non stiamo qui a dimostrare) per arrivare allo stesso risultato: aumenta di 1 ciascuna potenza dei fattori primi e moltiplica tra loro tali somme: $(3+1)(4+1)(1+1) = 40$.
Se $189 = 3^3 \cdot 7$, allora 189 ha $4 \cdot 2 = 8$ divisori.

#97 determina quanti numeri di 5 cifre esistono aventi le stesse cifre del numero 16.306 (ciascuna cifra deve comparire nel numero lo stesso numero di volte con cui compare nel numero 16.306):
il problema si presenta come PERMUTAZIONE su 5 posizioni delle cifre $\{1,6,3,0\}$ con RIPETIZIONE del 6, ma ha un vincolo che lo rende ibrido, perché dobbiamo escludere i numeri che iniziano per zero; senza questa esclusione la risposta sarebbe
$P_k^r = \frac{k!}{r_1! r_2! \ldots r_k!} = \frac{5!}{2!} = 60$, ma dobbiamo togliere i numeri inizianti con zero: quanti sono? Tanti quante le permutazioni su 4 posti delle cifre $\{1,6,3\}$ con ripetizione del 6, cioè $P_k^r = \frac{4!}{2!} = 12$. Risp.: $60 - 12 = 48$

#98 una partita di calcio tra Napoli e Torino è finita 3 a 2: in quanti modi diversi possono essersi succedute le reti? Come cambierebbe la risposta sapendo che il Napoli è sempre rimasto in vantaggio dopo il primo goal? E come cambierebbe la risposta sapendo che nel corso della partita il Napoli si è trovato in svantaggio almeno una volta?.
#98a Per dare la prima risposta calcoliamo quante PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE ha la

sequenza NNNTT: $P_k^r = \frac{5!}{3!2!} = 10$
#98b Per essere sempre in vantaggio il Napoli deve segnare il primo goal, ma anche il secondo per evitare la sequenza che inizi con NT (pareggio), quindi dopo NN restano le permutazioni di NBB che sono $P_k^r = \frac{3!}{2!} = 3$ (NBB, BNB, BBN) dalle quali dobbiamo escludere la BBN perché avrebbe fatto pareggio con l'iniziale NN: quindi la seconda risposta è $3 - 2 = 2$
#98c Calcolare quante volte il Napoli sarebbe andato in svantaggio almeno una volta equivale a calcolare quante volte il Torino sarebbe andato in vantaggio almeno una volta: tutte le volte che il Torino avesse fatto il primo goal (T****) più tutte le volte che avesse rimontato il primo goal del Napoli (NTT**), quindi le permutazioni di TNNN più le permutazioni di NN: $\frac{4!}{3!} + \frac{2!}{2!} = 4 + 1 = 5$

#112 cinque ballerini vogliono ballare un valzer (ballo a due) con cinque ballerine: quanti accoppiamenti sono possibili?
Il primo ballerino ha 5 scelte, il secondo 4 e così via: applichiamo il solito principio fondamentale, $5! = 120$
Oppure ragioniamo così: nominati i ballerini con le loro iniziali ABCDE, allineate le 5 ballerine gomito a gomito, i cinque ballerini si possono disporre di fronte alle ballerine in tanti modi quanti gli anagrammi di ABCDE: $P_n = n! = 5! = 120$

#113 **Vincolo VICINI o DISTANTI**.
Nella prima fila di un'aula devono sedersi sei studenti: quattro ragazzi e due ragazze. Determina in quanti modi possono disporsi:

a) se possono sistemarsi in ordine qualunque
b) se i ragazzi devono stare vicini tra loro e le ragazze devono stare vicine tra loro
c) se le ragazze devono stare vicine tra loro mentre i ragazzi possono disporsi a ordine qualunque

#113a Risp.: tanti modi quante le permutazioni senza ripetizione $P_n = n! = 6! = 720$ (e sarebbe lo stesso che $D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$)
I quesiti 113b e 113c introducono vincoli che rendono ibrido mil problema: possiamo risolvere in più modi, ad esempio con un procedimento analitico ad albero, ed un secondo procedimento più sbrigativo.
A) Procedimento ad albero.
Premettiamo che intenderemo da sx a destra il verso di disposizione progressiva degli oggetti o dei gruppi dei medesimi.
A#113b la risposta dipende da cosa si intende per "vicini tra loro"
A#113b1 se intendiamo che i 4 ragazzi debbono stare tutti 4 vicini tra loro (intendimento più probabile), vediamo che il blocco di 4 ragazzi si può disporre partendo dal 1° o dal secondo o dal 3° posto, ma se partisse dal 2° le 2 ragazze si dovrebbero separare sedendosi al 1° e al 6° posto, quindi restano 2 possibilità per il blocco dei 4 ragazzi, per ciascuna delle quali nel blocco i ragazzi possono sedersi in 4! permutazioni, quindi $2 \cdot 4! = 48$; per ciascuna di queste scelte dei ragazzi, le ragazze possono disporsi in due modi, quindi $48 \cdot 2 = 96$
A#113b2 se qualcuno intendesse che i 4 ragazzi possono stare anche a due a due vicini tra loro, alle suddette 96 possibilità dovrebbe aggiungerne altre 48 (2 seduti sx, 2 a dx, permutano $4!$ volte, moltiplicato per le $2!$ delle ragazze fa 48)
A#113c la coppia di ragazze può sedersi a partire dal 1° o 2° o 3° o 4° o 5° posto, in 5 modi, per ciascuno dei quali i ragazzi possono permutare in $4! = 24$ modi diversi; per ciascuna di queste $5 \cdot 24 = 120$ disposizioni, le ragazze possono permutare in due modi, quindi $120 \cdot 2 = 240$.
B) Procedimento con permutazioni successive a partire dalla **FUSIONE dei posti vicini**.
B#113b **fondiamo** i posti dei 4 maschi vicini in un unico posto M, e fondiamo le due femmine in un unico posto F; le permutazioni dei due posti M ed F sono $2! = 2$; riportiamo M a 4 posti sui quali i maschi possono permutare in $4! = 24$ modi; .riportiamo F a due posti sui quali le femmine possono permutare in $2! = 2$; per il principio fondamentale i modi possibili sono $2 \cdot 24 \cdot 2 = 96$.
B#113c **fondiamo** le 2 femmine in un unico posto F, permutiamo le 5 posizioni $\{F, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ in $5! = 120$ modi; splittando F, le due femmine possono permutare in $2! = 2$ modi: $120 \cdot 2 = 240$.
Il procedimento della FUSIONE si può usare anche per esercizi nei quali il vincolo sia di tenere separate anziché vicine le persone, basta togliere dalle permutazioni senza vincoli le permutazioni con il vincolo "vicine".

#163 quanti diversi incontri di pugilato possono essere organizzati tra 6 pugili? Cioè calcolare quante coppie diverse ma non ordinate possiamo costruire pescando da 6 oggetti diversi: $C_{n,k} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$; ;

equivale a calcolare il numero di diagonali + lati di un esagono.

#164 quante strette di mano possono scambiarsi 8 persone, stabilendo che ciascuno non può stringere una seconda volta la mano ad un altro? Come il problema #163: $C_{n,k} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$

#166 quanti ambi diversi puoi comporre con i 90 numeri del lotto? Problema analogo ai precedenti

$$C_{n,k} = \frac{90!}{2!\,(90-2)!} = 4.005$$

#172 sappiamo che sono 10 gli anagrammi della parola MAMMA (permutazioni con ripetizione), ma potremmo arrivare allo stesso risultato, osservando che, essendo solo 2 le lettere diverse, basterebbe

- calcolare in quanti modi possono disporsi 3 lettere M sui 5 posti diversi: $C_{n,k} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$ (Nota4)
- calcolare in quanti modi possono disporsi 2 lettere A sui 5 posti diversi: $C_{n,k} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$

#173 determina tutti i possibili anagrammi della parola PAPPA utilizzando le permutazioni con ripetizione oppure le combinazioni senza ripetizione come nel #173

#174 vorrei scegliere 2 o 3 libri tra dieci che non ho ancora letto: quante scelte posso fare?
Non conta l'ordine. Raggruppamenti $C_{n,k}$ di 3 più i $C_{n,k}$ di 2 $= \frac{10!}{2!(10-2)!} + \frac{10!}{3!(10-3)!} = 45 + 120 = 165$

#186 in quanti modi si possono assegnare 15 scrivanie uguali a 4 uffici, ammettendo anche il caso che a qualche ufficio non venga assegnata alcuna scrivania? Siamo nel caso di n elementi UGUALI su k posti e allora, come spiegato in Nota4, proviamo ad INVERTIRE n con k; numeriamo i posti da 1 a 4 e vediamo in quanti modi possiamo mettere questi 4 numeri con ripetizione su 15 posti (anche il solo numero 3 su tutti 15 i posti, il che equivarrebbe alla combinazione che assegna tutte le 15 scrivanie all'ufficio numero 3): $C^*_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(4+15-1)!}{15!(4-1)!} = \frac{18!}{15!3!} = 816$ (osserva che equivale a una combinazione senza ripetizione di 18 elementi diversi su 15 posti $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{18!}{15!3!}$ detta anche coefficiente binomiale $\binom{18}{15}$
Come cambierebbe il problema se ad ogni ufficio si dovesse dare almeno una scrivania? Sarebbe come se partissimo avendo già dato ad ogni ufficio una scrivania: distribuiamo le restanti 11 come nel caso precedente: $C^*_{n,k} = \frac{(4+11-1)!}{11!(4-1)!} = \frac{14!}{11!3!} = 364$

#190 venti lavagne interattive uguali devono essere distribuite a 10 scuole in modo tanto variabile che a qualche scuola potrebbe non essere assegnata alcuna lavagna: in quanti modi diversi può avvenire tale distribuzione? E in quanti modi se ad ogni scuola dovesse essere assegnata almeno una lavagna?
Risolviamo come nell'esercizio #186 $C^*_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(10+20-1)!}{20!(10-1)!} = 10.015.005$
e $C^*_{n,k} = \frac{(10+10-1)!}{10!(10-1)!} = 92.378$

#255 Vogliamo dividere in due classi da 10 una classe formata da 20 alunni: in quanti modi possiamo farlo? Considera irrilevante l'ordine dei due gruppi. I primi 10 alunni possono essere scelti in $\binom{20}{10} = 184.756$ modi diversi, gli altri 10 in un modo solo $\binom{10}{10} = 1$, ma dobbiamo dividere il risultato per due $184.756 : 2 = 92.378$, perché, per simmetria, nelle configurazioni per la scelta della prima classe sono contenute anche quelle della seconda. Vedi Nota5.
Con queste considerazioni, ad esempio, valuta tu se sia giusta la soluzione del seguente problema leggibile qui in web: dividere la classe in 4 gruppi, due da 6, e due da 4: in quanti modi lo possiamo fare? L'ordine non conta. I primi 6 possono essere scelti in $\binom{20}{6}$ modi; i secondi 6 in $\binom{14}{6}$ modi, la terza scelta in $\binom{8}{4}$ modi, i 4 restanti possono essere scelti in un modo solo; per il principio fondamentale le possibili configurazioni sono $38760 \cdot 3003 \cdot\ 70 =\ 8.147.739.600$. Sicuro?

#261 L'investigatore Sherlock Holmes indaga su un crimine e deve scoprire un certo numero di telefono di 5 cifre sul quale ci sono i seguenti elementi utili all'indagine: a) il numero termina con la cifra zero, b) la seconda cifra è dispari, c) tutte le cifre sono diverse tra loro, d) la cifra più grande è 6: quanti numeri telefonici deve controllare l'investigatore? È un problema ibrido dove conta l'ordine nei numeri e n>k:

fissato lo zero in ultima posizione a destra, restano le prime 4 posizioni; faremo 3 serie di configurazioni, mettendo in 2ªposizione di volta in volta una delle 3 cifre dispari $\{1,3,5\}$; per ciascuna di queste 3 configurazioni deve esserci sempre il numero 6 che potrà disporsi in uno dei 3 posti ancora liberi (3 scelte), lasciando così ancora 2 posti liberi nei quali le restanti 4 cifre potranno disporsi in $D_{n,k} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$ modi diversi: per ciascuna delle 3 configurazione avremo dunque $3 \cdot 12 = 36$ scelte diverse; al variare del dispari in 2ª posizione avremo in totale $3 \cdot 36 = 108$ numeri telefonici da controllare.

#264 Se Anna ha 10 amici
a) in quanti modi può invitarne 5 a pranzo?
b) in quanti modi può invitarne 5 a pranzo se due sono così legati tra loro di loro che, o vengono invitati assieme, o declinano l'invito?
c) in quanti modi può invitarne 5 a pranzo se due hanno così litigato tra loro che partecipano solo separatamente?
Risp#264a: in $\binom{10}{5} = 252$ modi
Risp#264b: Anna può cercare le possibili combinazioni con o senza la coppia legata: senza la coppia legata potrà combinare inviti in $\binom{8}{5} = 56$ modi, mentre se è presente la coppia legata potrà usare i restanti 3 posti per invitare gli altri 8 amici in $\binom{8}{3} = 56$ modi; $56 + 56 = 112$ modi.
Risp#264c: Anna può cercare le possibili combinazioni senza la coppia legata e poi aggiungere le combinazioni possibili invitando il primo dei due litigiosi e poi quelle con l'altro dei due litigiosi: senza la coppia legata potrà combinare inviti in $\binom{8}{5} = 56$ modi; quando invita il primo dei due litigiosi, non invita il secondo e potrà combinare gli altri 8 amici sui restanti 4 posti in $\binom{8}{4} = 70$ modi; in altrettanti 70 modi potrà combinare gli amici invitando il secondo litigioso e non il primo: $56 + 70 + 70 = 196$ modi.

#269 Un'urna contiene 10 palline 5 nere numerate da 1 a 5, 3 palline rosse numerate da 6 a 8 e 2 palline bianche numerate 9 e 10. Supponi di estrarre dall'urna 5 palline una dopo l'altra, rimettendo nell'urna ogni pallina estratta prima di fare una successiva estrazione.
#269a determina in quanti modi diversi può presentarsi la cinquina di palline estratte.
#269b determina in quanti modi è possibile estrarre 5 palline di cui esattamente due rosse
#269c rispondi nuovamente alle domande a e b nel caso in cui le 5 palline siano estratte successivamente ma senza re-immissione
#269d rispondi nuovamente alle domande a e b nel caso in cui le 5 palline siano estratte contemporaneamente.
Per quanto sia sottinteso (intendimento di default) esplicitiamo che nei casi a, b, c si intende che la cinquina sia ordinata, cioè, ad esempio, una cinquina che si presentasse 17544 è da intendersi diversa da quella che si presentasse 15744.
Per dare risposta al #269a non importa il colore delle palline, perché ciascuna pallina è contraddistinta dalla cifra che ha impressa; dunque il quesito #269a equivale a dire «in quanti modi si possono disporre con ripetizione i numeri da 1 a 9 su 5 posizioni ordinate?»: la risposta è $D^*_{n,k} = n^k = 10^5$.
Cerchiamo risposta per il #269b: due delle 5 posizioni, dovunque si trovino nella cinquina, debbono essere occupate da palline rosse, mentre le altre 3 posizioni della cinquina debbono essere occupate dalle 7 palline non rosse, le quali su queste 3 posizioni possono disporsi con ripetizione in $D^*_{n,k} = 7^3 = 343$ modi diversi; nelle due posizioni riservate alle 3 palline rosse queste si possono disporre con ripetizione in $D^*_{n,k} = 3^2 = 9$ modi diversi; ora chiediamoci in quanti modi i due posti riservati alle palline rosse possono collocarsi nella cinquina: usando il criterio di per nota 3 il quesito equivale a disporre senza ripetizione 5 elementi su due posti; quindi diremmo $D_{n,k} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ modi, ma, siccome ciascuna delle suddette 9 coppie compare anche con la sua simmetrica, in ciascuno di questi 20 modi esiste anche il suo uguale, quindi, dobbiamo dividere per due $20:2 = 10$ che in questo caso equivarrebbe a combinazione $C_{n,k} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$. Risultato: $343 \cdot 9 \cdot 10 = 30.870$.
Cerchiamo risposte al #269c.
Per il #269c.a senza re-immissione la cinquina potrà presentarsi in $D_{n,k} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30.240$ modi.
Per il #269c.b senza re-immissione possiamo fare gli stessi ragionamenti del #269b, ma usando le formule senza ripetizione corrispondenti: per le 7 palline non rosse su 3 posti $D_{n,k} = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$ modi; per le 3 palline rosse su due posti $D_{n,k} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ modi; i due posti delle rosse si possono collocare nella cinquina in 10 modi come nel #269b: risposta $210 \cdot 6 \cdot 10 = 12.600$ modi.

Nel #269d.a abbiamo estrazione contemporanea della cinquina, quindi non conta l'ordine delle palline che abbiamo in pugno, quindi combinazione senza ripetizione di 10 oggetti su 5 posti: $C_{n,k} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$ modi.
Per il #269d.b dobbiamo avere in pugno 5 palline di cui 2 rosse pescabili da 3 rosse in $C_{n,k} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ modi, e dobbiamo avere 3 palline non rosse pescabili da 7 in $C_{n,k} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$ modi: risposta $35 \cdot 3 = 105$ modi diversi.

↑2020.04.29 traggo <daUnLibroDitesto>
#1 Quanti anagrammi anche senza senso si possono fare con la parola mamma? Per anagramma significa che dobbiamo usare tutte le 5 lettere, scambiandole di posto a piacere.
Abbiamo 5 oggetti che si possono disporre in 5 posti ordinati (quindi permutazione) con lettera m che si ripete 3 volte e lettera a che si ripete due volte, dunque

$$P_k^r = \frac{k!}{r_1!\, r_2!} = \frac{5!}{3!\, 2!} = \frac{120}{12} = 10$$

#2 hai una bacinella di colore liquido bianco ed un'altra di colore liquido nero; puoi creare colori diversi mischiando 5 gocce scelte dal bianco e/o dal nero; quante miscele diverse puoi fare?
n=2, k=5, non importa l'ordine, si possono fare massimo 5 ripetizioni di uno stesso colore.

$$C_{n,k}^* = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} = \frac{6!}{5!} = 6$$

un colore con 5 gocce di bianco, uno con 5 di nero, 4 con sfumature di grigio

#6 In una classe di 24 alunni l'insegnante ne vuole interrogare 3 tra cui Paolo. Quanti sono i possibili gruppi di interrogandi?
Si intende che in qualsiasi gruppo deve esserci Paolo, quindi gli altri 23 alunni possono disporsi nei due posti restanti; non conta l'ordine, quindi è combinazione; senza ripetizione
quindi coefficiente binomiale 23 su 2

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{23!}{2!21!} = \frac{23 \bullet 22}{2} = 253$$

#7 Una password è costituita da 5 caratteri, ciascuno dei quali può essere una delle 21 lettere dell'alfabeto italiano oppure una delle cifre da 0 a 9. Quante psw diverse si possono formare che iniziano con una vocale e terminano con un numero dispari aventi caratteri tutti distinti?
Conta l'ordine, quindi sarebbe una disposizione, senza ripetizione, ma ha vincoli, quindi è un problema ibrido.
Consideriamo le scelte possibili sulla prima e ultima lettera della psw: sarebbero 25; ciascuna di queste scelte va moltiplicata per le possibili disposizioni dei restanti 29 caratteri sulle tre posizioni centrali che sono

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{29!}{26!} = 29 \cdot 28 \cdot 27 = 21.924$$

25·21.924= 548.100

#8 Ogni colonna della schedina del Totocalcio è costituita da 13 caselle ciascuna delle quali deve essere riempita con uno dei tre simboli 1X2. In quanti modi diversi si può riempire una colonna con 6 segni 1, 4 segni X e tre segni due?
Tutti gli anagrammi possibili della parola 111111xxxx222

$$P_k^r = \frac{13!}{6!\,4!\,3!} = 60.060$$

#9 un magazzino di una casa editrice ha in giacenza 10 titoli di libri (il numero di copie di ciascuno è più che sufficiente a far fronte a qualunque richiesta). In quanti modi possibili quel magazzino può ricevere un ordine di 15 volumi?

$$C_{n,k}^* = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(10+15-1)!}{15!(10-1)!} = \frac{24!}{15!9!} = 1.307.504$$

#10 un ristorante offre 5 primi, 7 secondi e 10 tipi di vino. Per un matrimonio si richiedono un Tris di primi, due secondi e due vini. L'antipasto è a buffet e come dessert c'è la torta nuziale. In quanti modi diversi si può predisporre il menù?

$$\binom{5}{3}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{10}{2} = \frac{5!}{3!2!}\frac{7!}{2!5!}\frac{10!}{2!8!} = 10\cdot 21\cdot 45 = 9.450$$

↑2020.04.28 problema ibrido. Usando le 21 lettere dell'alfabeto italiano, costruisci parole anche senza senso con questo vincolo: una lettera si ripete esattamente 3 volte e un'altra 2, come ad esempio *omamma*. Quante parole puoi comporre che abbiano tale *layout*?

<*liceoMajorana*> a pag 33 risolve così: prima di tutto scegliamo le lettere diverse fra loro: per designare quella che compare 3 volte esistono 21 modi, 20 per quella ripetuta e 19 per la solitaria. A questo punto tocca posizionarle: la lettera ripetuta tre volte può essere disposta su sei posti liberi in $\binom{6}{3}$ = 20 modi. Nelle 3 caselle ancora libere va ora posizionata la lettera solitaria (3 scelte) mentre gli ultimi due posti a disposizione vanno occupati con la lettera (ripetuta) rimasta. Complessivamente le scelte sono 21 20 19 20 3 1 = 478.800

Proporrei un a soluzione alternativa: fatta la scelta ordinata di 3 lettere diverse x y z consideriamo la parola xxxyyz e tutti i suoi anagrammi che sono

$$P_k^r = \frac{6!}{3!\,2!} = 60$$

Quante triplette ordinate x y z potrei scegliere?

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad \frac{21!}{18!} = 7.980$$

Il risultato sarà 60·7.980=478.800.

SEGUITO DEL SOMMARIO

Nota1: **il principio fondamentale del calcolo combinatorio** (*diagramma ad albero*)

se una scelta può essere fatta in r modi diversi, per ciascuno dei quali una seconda scelta può essere effettuata in s modi diversi, e, per ciascuno dei modi in cui si sono compiute le prime due scelte una terza scelta può essere effettuata in t modi diversi ecc., allora la successione di tutte le scelte può essere compiuta in r·s·t... modi diversi.

Nota2: è vero o falso che nelle permutazioni $n = k$? Sì: è ovvio che sia vero per le permutazioni senza ripetizione; per quelle con ripetizione occorre precisare che per n si intende il numero di tutti gli OGGETTI, anche di quelli ripetuti (nella parola mamma ci sono 5 oggetti/lettere); a scanso di equivoci, nella formula della permutazione con ripetizione uso k invece di n; vedi anche Nota4

Nota3: e se fosse una disposizione con $n < k$? Propongo **inversione tra n e k** spiegata con le *palette* (*termine* inventato a caso da me per spiegare meglio a costo di risultare banale, termine che non ho trovato usato da libri di testo)

3.a: in quanti modi diversi possono sedersi 2 ragazzi su tre sedie libere allineate da sx a dx? Tieni fissi affiancati i due ragazzi e immagina che ciascuno di essi alzi una *paletta* evidenziante il numero della sedia prescelta, quindi chiediti quante coppie ordinate si possono fare con 3 numeri, tenendo presente che **non ci può essere ripetizione** di numero (non ammettiamo che su una stessa sedia ci possa stare più di un ragazzo): $D_{n,k} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

3.b: in quanti modi diversi possono scendere 3 persone da un ascensore di 6 piani? Applica lo stesso metodo delle palette, tenendo fissi affiancati i tre ragazzi e immaginando che ciascuno di essi alzi una *paletta* evidenziante il numero del piano a cui è sceso, quindi chiediti quante triplette ordinate si possono fare con 6 numeri, tenendo presente che **qui ci può essere ripetizione** (possono scendere anche tutti allo stesso piano oppure due scendere a un piano e il terzo ad un altro piano): la risposta è $D^*_{6,3} = 6^3$. E se l'ascensore facesse solo 2 piani? In prima istanza potresti tentare di disporre le tre persone su due posti $D_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$, ma dovresti aggiungere 2, cioè i due casi in cui le persone scendono tutte ad un piano lasciando vuoto l'altro dei due posti; se invece usi il metodo delle *palette*, conti il numero delle triplette componibili con 2 numeri, ottenendo la risposta giusta $D^*_{2,3} = 2^3 = 8$.

Nota4: quando avessimo da distribuire di n elementi uguali su k posti diversi, potrebbe essere utile invertire di n con k, sia nel caso di $n < k$ sia nel caso di $n > k$.

- Es.1 con $n < k$: in quanti modi d iversi possono disporsi 3 lettere M in una parola da 5 lettere? INVERTIAMO numerando da 1 a 5 i posti e vediamo quante triplette possiamo fare con queste 5 cifre senza badare all'ordine: $C_{n,k} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$.
- Es.2 con $n > k$: vedi esercizio #186: dare 15 scrivanie uguali a 4 uffici $C^*_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(4+15-1)!}{15!(4-1)!}$

Nota5: 4 alunni di nome A,B,C,D devono essere **divisi in due gruppi** da 2, non conta ordine: in quanti modi possibili possiamo suddividerli? Potremmo scegliere la composizione del primo gruppo in $\binom{4}{2} = 6$ modi possibili: vediamoli: AB, AC, AD, BC, BD, CD, ma a ciascuna di queste scelte corrisponde la seguente composizione obbligata del secondo gruppo: AB|CD, AC|BD, AD|BC, BC|AD, BD|AC, CD|AB: siccome è indifferente l'ordine non solo dentro il gruppo, ma anche tra i due gruppi, vediamo che le configurazioni dello stesso colore sono equivalenti, e, quindi, per la simmetria del caso, sono 3 non 6 i modi possibili della divisione richiesta.